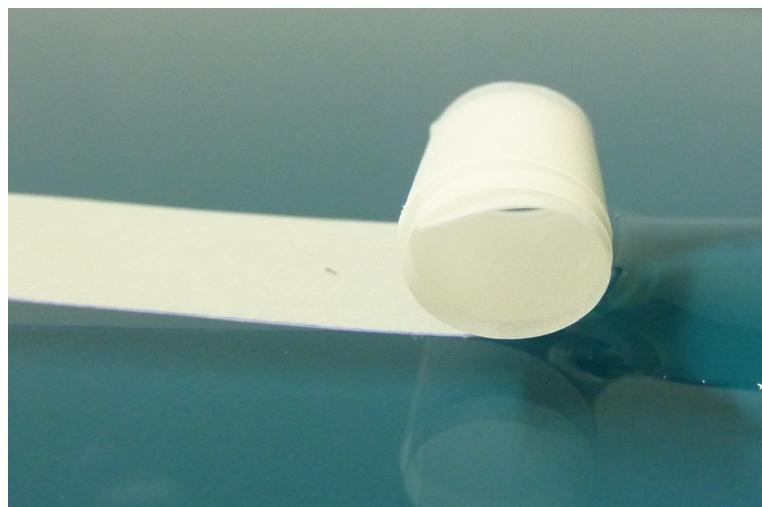


# Enroulement induit par gonflement : étude expérimentale et théorique



**L. Tadrist**

Janvier – Juin 2010

Équipe "Surfaces Douces" UMR 168, Institut de recherche contre le cancer Curie

D. Cuvelier - F. Brochard-Wyart



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Polymersomes optiquement sensibles . . . . .	4
1.2	Le papier . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Matériel et méthodes</b>	<b>7</b>
2.1	Préparation de la bande de papier . . . . .	7
2.2	Présentation de l'expérience . . . . .	8
2.2.1	De la nécessité des huiles visqueuses . . . . .	9
2.2.2	Le tapis de Fakir . . . . .	9
2.3	Méthode de mesure de vitesse . . . . .	11
2.4	Méthode de mesure de la force d'enroulement . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Prédictions théoriques</b>	<b>13</b>
3.1	Elasticité du système bilame . . . . .	13
3.2	Force d'enroulement . . . . .	13
3.3	Friction visqueuse . . . . .	15
3.4	Expression de la vitesse en régime visqueux . . . . .	16
3.5	Les longues bandes $L > L_0$ . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>18</b>
4.1	Force en fonction du rayon du cylindre : caractérisation statique . . . . .	18
4.2	Vitesse en fonction de la viscosité . . . . .	18
4.3	Vitesse en fonction de la force . . . . .	20
4.4	Enroulement expérimental et discussion . . . . .	21
4.4.1	Courte bandes ou temps courts : la courbure dynamique . . . . .	21
4.5	Aux temps longs : Enroulement en régime visqueux . . . . .	23
4.6	discussion de la loi d'échelle d'évolution de la vitesse . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>26</b>
6.1	<b>Expression de l'énergie de courbure</b> . . . . .	26
6.2	<b>Éléments de théorie en régime inertiel et visco-inertiel</b> . . . . .	29
6.2.1	Régime visco-inertiel . . . . .	29
6.2.2	Régime inertiel . . . . .	29
6.2.3	Limites entre les différents régimes . . . . .	30

# 1 Introduction

Qui n'a jamais joué à courber légèrement une feuille de papier et à la relâcher soudainement pour créer un son ? Personne. Cet effet physique s'explique simplement : la feuille courbée est forcée dans un état hors équilibre. Des contraintes internes (des petites compressions ou elongations) s'opposent à la force externe exercée sur la feuille. Lorsque soudainement on relâche la feuille, les contraintes internes relaxent et la feuille retrouve progressivement sa position plate d'équilibre. Le mouvement induit par la relaxation fait vibrer l'air alentour à la feuille : on entend un bruit.

Telle la feuille de papier, plusieurs systèmes rencontrés dans la nature (Pomme de pin [1], globule rouge [2]) ou en laboratoire ( Polymersomes [3]) sont susceptibles de connaître un mouvement après relaxation de contraintes internes.

Les pommes de pin protègent les pignons, les graines du pin. Pour augmenter les chances de survie de l'espèce, les pignons doivent être relâchés dans le milieu le plus propice à la vie des futurs arbres. Un milieu humide est favorable à la croissance des futurs pins alors que leur développement est fortement compromis si le milieu est trop sec. Les pommes de pins sont sensibles à l'hygrométrie extérieure. Les écailles des pommes de pin s'ouvrent si l'humidité est importante et relâchent les pignons. Au contraire, si l'air extérieur est sec, les écailles se ferment et les pignons restent protégés. Figure 1. Ces mouvements hygro-sensibles sont dus au gonflement d'une couche de bois constituant l'extérieur de l'écaille de la pomme de pin. Ce gonflement induit des contraintes internes qui relaxent en créant un mouvement.

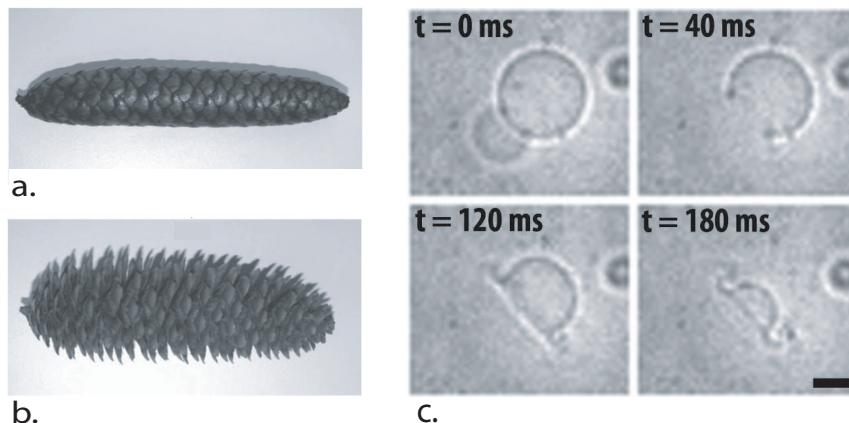


FIGURE 1 – **a.** Pomme de pin en milieu sec : fermée. **b.** Pomme de pin en milieu humide : ouverte. **c.** Explosion de polymersome après photo-sensibilisation.

## 1.1 Polymersomes optiquement sensibles

Les polymersomes sont constitués de deux couches de copolymères accolées pour former une membrane sphérique. Les polymersomes sont fermés, ils isolent un milieu intérieur du milieu extérieur. Pour des polymersomes stimulables, on utilise une seule couche activable, la couche intérieure par exemple. Dans le cas étudié par M. Mabrouk et al [3], le stimulus consiste en un rayonnement UV intense qui fait gonfler la couche (un copolymère subit un changement de conformation cis-trans. Figure 2). La vésicule reste de forme ronde, pourtant les deux couches de la membrane ne sont plus de la même taille. Des

contraintes internes naissent dans ce système. Les fluctuations thermiques vont percer la membrane. Si le trou est assez grand et dépasse une taille critique, le système va pouvoir relaxer. La membrane s'enroule sur elle-même. Figure 1.

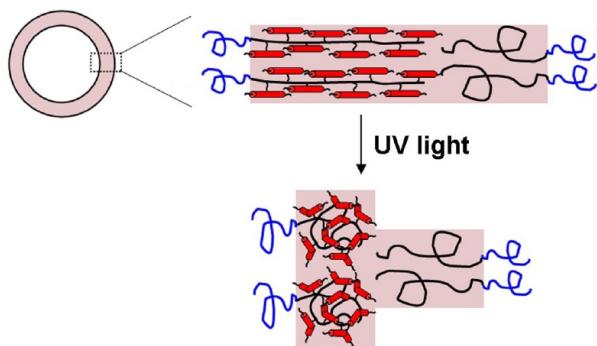


FIGURE 2 – Changement de conformation cis-trans de la couche de copolymère sensible. [3]

Une modélisation est nécessaire afin de mieux comprendre le phénomène d'enroulement après éclatement des objets biologiques. L'étude directe est compliquée du fait de la taille des objets ( $\sim 20\mu m$ ), des temps mis en jeu ( $\sim 100ms$ ) et de la difficulté à changer les paramètres sans changer de système. Dans un souci de simplification expérimentale, j'ai étudié un système modèle à base de papier. Le papier gonfle fortement en présence d'eau (gonflement hygrométrique). Le gonflement du papier est suffisant pour induire un enroulement. Je me suis concentré sur *l'étude des propriétés et de la cinétique d'enroulement de ce système modèle*.

Ici, nous nous intéressons à des systèmes bilames constitués de deux couches de natures différentes. Une stimulation extérieure fait gonfler une couche alors que l'autre reste à sa taille initiale. La position initiale n'est plus une position d'équilibre. Pour relaxer les contraintes, un mouvement a lieu. Si le gonflement est assez important, on assiste à un enroulement du système sur lui-même.

## 1.2 Le papier

Il existe plusieurs sortes de papiers (papier aquarelle, buvard, calque, pour imprimante, brillant, ultra blanc, ...). Les différences de propriétés entre tous ces papiers ont deux origines :

*Une origine chimique.* Ce sont tous les adjuvants (Kaolin, talc, argiles...) que l'on rajoute au papier pour le rendre plus blanc, plus lisse, moins poreux ...

*Une origine physique.* C'est le raffinage du papier. Lors de sa fabrication, le papier est pressé entre deux cylindres sécheurs. Cette opération est répétée plusieurs fois pour raffiner de plus en plus le papier. Lors du passage entre les cylindres, les fibres de cellulose constituant la pâte à papier s'alignent dans la même direction. Le papier est de plus en plus dense et anisotrope [4].

Le papier buvard est peu raffiné, il est peu anisotrope. Cependant il est très poreux et est donc un excellent absorbant. L'eau est stockée dans les pores du papier. Le gonflement est faible.

Le papier calque est le papier le plus raffiné (avec quelques autres papiers rares à usage spécifique). Il est tellement dense, qu'il n'est presque plus poreux. La lumière ne diffuse plus à l'intérieur des pores du papier, c'est pour cela qu'il est transparent. Ce papier, mis en présence d'eau est faiblement absorbant, mais gonfle beaucoup. Les molécules d'eau viennent s'intercaler entre les fibres de cellulose. Le fait que le papier calque soit très raffiné lui confère une grande anisotropie. Cette anisotropie se répercute sur

le gonflement. En présence d'eau, le papier calque ne gonfle que de 0,5% dans le sens d'orientation des fibres alors qu'il connaît une croissance de 11% de sa longueur dans la direction transverse. Figure 3.

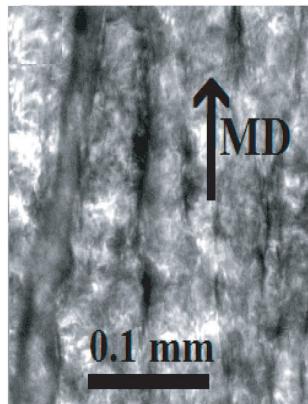


FIGURE 3 – Fibres de papier observées au microscope optique : lors du raffinage les fibres s'orientent dans la direction de la machine (MD) ce qui crée une forte anisotropie. [5]

## 2 Matériel et méthodes

### 2.1 Préparation de la bande de papier

Au départ du stage, la bande de papier calque était simplement posée sur l'eau [5]. Dans ce cas là, le phénomène de courbure a lieu à l'intérieur même du claque. La partie inférieure du calque est en contact avec l'eau. L'eau diffuse dans le calque, un front d'eau sépare la partie sèche de la partie mouillée du calque. La partie mouillée correspond à la couche gonflée. Au dessus du front, le calque reste sec et ne gonfle pas. On a un système bilame dynamique. Figure 4. Expérimentalement, la cinétique d'imbibition est faible comparée à la cinétique d'enroulement : on observe un enroulement quasi statique du calque sur lui-même. Cependant la présence de forces capillaires et la cinétique d'imbibition compliquent largement le problème. De plus aux temps longs le papier s'imbibe totalement et se déroule. La description de la dissipation visqueuse n'est pas simple non plus (ligne triple).

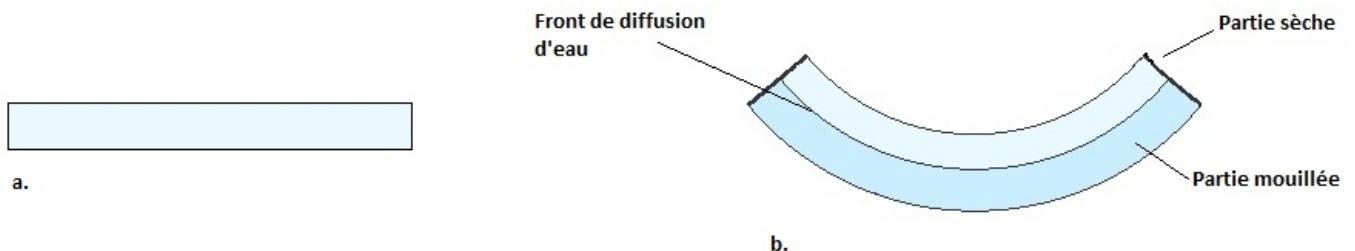


FIGURE 4 – a. Papier calque sec et plat. b. Papier claque en cours d'imbibition : un bilame délimité par un front de diffusion d'eau.

Dans un souci de simplification théorique et expérimentale du problème, j'ai mis au point une expérience plus simple. On a utilisé du papier calque recouvert de scotch.

On maintient le système à plat. En plongeant longtemps le système dans l'eau ( $>30$  secondes), le calque est totalement imbibé. Maintenir le système mouillé à plat crée une contrainte importante entre la couche de calque et la couche de scotch. En relâchant la contrainte externe, le système s'enroule sur lui même. On s'affranchit de la cinétique d'imbibition, on obtient une courbure d'équilibre  $C_0$  constante dans le temps.

- Alors que le papier calque simple s'enroule à la surface de l'eau, notre système bilame peut être immergé. Pour modéliser l'enroulement des polymersomes, on a travaillé non à la surface, mais dans le volume du fluide. On évite les forces capillaires et la dynamique de ligne triple qui interviennent lorsque le papier calque s'enroule à la surface.
- On peut travailler dans un liquide différent de l'eau. Il suffit de charger préalablement le calque en eau et de maintenir le système forcé en position plate lors du transport. En le relâchant, le système s'enroule dans le liquide choisi, de l'huile silicone par exemple. Cela permet de faire varier les propriétés du liquide régissant la dissipation visqueuse lors de l'enroulement et d'explorer une grande variété de régimes. (les nombres de Reynolds variant de 500 à 0,002).

Au cours du stage j'ai travaillé avec deux types de papier calque, du papier calque *Canson*<sup>®</sup>  $90g.m^{-2}$  et du papier calque *Canson*<sup>®</sup>  $70g.m^{-2}$ . J'ai utilisé principalement deux types de papier adhésif, du

*scotch<sup>®</sup>magic* et du papier adhésif monoprix bricolage. Enfin pour explorer une plus grande gamme de paramètres, j'ai utilisé du papier alimentaire (rayon découpe de fromage chez Monoprix) dont une face est recouverte d'un film plastique. L'épaisseur du papier est un paramètre important de notre système, les valeurs des épaisseurs des différents papiers sont reportées dans la Table 1.

Type	Épaisseur
Calque <i>Canson<sup>®</sup></i> 90g.m <sup>-2</sup>	72µm
Calque <i>Canson<sup>®</sup></i> 70g.m <sup>-2</sup>	60µm
Adhésif <i>Scotch<sup>®</sup>magic</i>	46µm
Adhésif monoprix	42µm
Papier Alimentaire Monoprix	56µm

TABLE 1 – Les différentes épaisseurs des papiers et adhésifs utilisés

## 2.2 Présentation de l'expérience

Une cuve transparente est remplie de liquide translucide. Ce liquide peut être de l'eau, de l'huile alimentaire, ou de l'huile silicone (Figure 2). Un dispositif constitué de deux poids et d'un tapis de fakir plaçant en immersion le système. Les deux poids maintiennent initialement le système à plat. Le tapis de fakir limite les effets de bord. Figure 5.

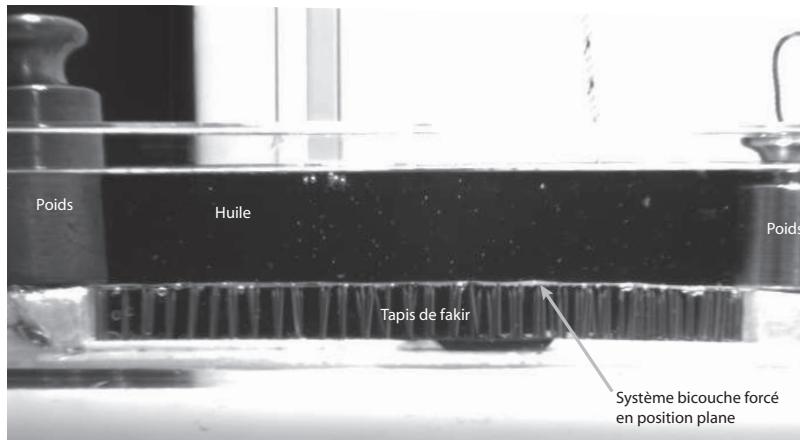


FIGURE 5 – Vue d'ensemble de l'expérience. Ici le système bilamellaire a déjà été chargé par immersion sous l'eau. Il est forcé par la présence des deux poids qui le maintiennent plan. Pour laisser le système relaxer, il suffit d'enlever un des poids

### 2.2.1 De la nécessité des huiles visqueuses

Les premières expériences immergées ont été lancées dans le liquide le plus facile à utiliser : l'eau ! Le dispositif peut être monté à sec puis immergé. Dans ce liquide la bande de papier calque recouvert de scotch s'enroule rapidement ( $\sim 10 \text{ cm.s}^{-1}$ ). Le Reynolds est grand, on est en régime inertiel :

$$Re = \frac{UR}{\nu} = 500$$

Avec la viscosité de l'eau ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ), une vitesse d'enroulement de  $10\text{cm.s}^{-1}$  et un rayon d'enroulement de  $0,5\text{cm}$ .

Le but de l'étude est de modéliser les polymersomes dont l'enroulement se fait en régime visqueux. Ainsi j'ai cherché à diminuer le nombre de Reynolds de l'écoulement. J'ai lancé le système dans un fluide plus visqueux. L'augmentation de la viscosité joue sur deux plans complémentaires du nombre de Reynolds. D'une part la viscosité apparaît de manière explicite dans l'expression du Reynolds, ensuite la vitesse d'enroulement diminue aussi. En travaillant dans de l'huile de cuisson ( $\nu = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ Pa.s}$ ), on atteint un Reynolds de 10. On tend vers le régime visqueux. Dans un mélange eau-glycérol dont la viscosité est tabulée en fonction de la fraction volumique en glycérin, on peut atteindre une viscosité de  $1,5 \text{ Pa.s}$ . Cependant pour des raisons osmotiques, l'eau contenue dans la bande de papier tend à s'en échapper pour diminuer la concentration en glycérin dans le volume. Le glycérin est très hygroscopique. Dans ce cas, on ne contrôle pas la courbure d'équilibre qui dépend de la quantité d'eau imbibée.

J'ai travaillé avec trois huiles silicones différentes dont les viscosités sont rapportées dans le tableau 2. Pour ces trois huiles les écoulements se font en régime visqueux.

Type	Huile de cuisson	Huile silicone 1	Huile silicone 2	Huile Silicone 3
Viscosité	$4,4 \cdot 10^{-2} \text{ Pa.s}$	$1,74 \cdot 10^{-1} \text{ Pa.s}$	$5,74 \cdot 10^{-1} \text{ Pa.s}$	$1,26 \text{ Pa.s}$
Reynolds	10	1,5	0,1	0,002

TABLE 2 – Les différentes huiles utilisées

### 2.2.2 Le tapis de Fakir

Si le système bilame est lancé directement sur le fond de la cuve, les effets de bords sont importants et la dissipation visqueuse s'en trouve très augmentée. L'épaisseur de fluide sous le calque lorsqu'il se décolle du fond de la cuve pour s'enrouler est faible. Le gradient de vitesse est donc fort à cet endroit là. La dissipation visqueuse est importante. La forme du système lors de l'enroulement et l'épaisseur de fluide sous le calque sont deux grandeurs difficiles à mesurer. Cependant, elles sont indispensables pour déterminer l'expression de la friction visqueuse lors de l'enroulement du calque. C'est toujours dans un but simplificateur que j'ai mis en place le tapis de Fakir. Le fait que le cylindre soit décollé du sol grâce au tapis de fakir permet de considérer un frottement visqueux en volume, sans lubrification. L'enroulement des bandes de papier est 5 fois plus rapide sur le tapis de fakir que sur le fond de la cuve.

La cuve avec laquelle j'ai travaillé était assez petite, si bien que les plus gros enroulements fleurettent avec la surface libre (Figure 6). Ceci n'est pas très important tant qu'il y a une couche de fluide au dessus. Hormis le sommet du cylindre, le reste de la surface est soumise au frottement visqueux. On s'attend à ce que la cinétique d'enroulement soit plus rapide par rapport à celle d'un milieu infini. Pour l'huile la plus visqueuse, travailler avec une petite cuve devient un réel inconvénient car les effets de bords commencent à se faire ressentir.

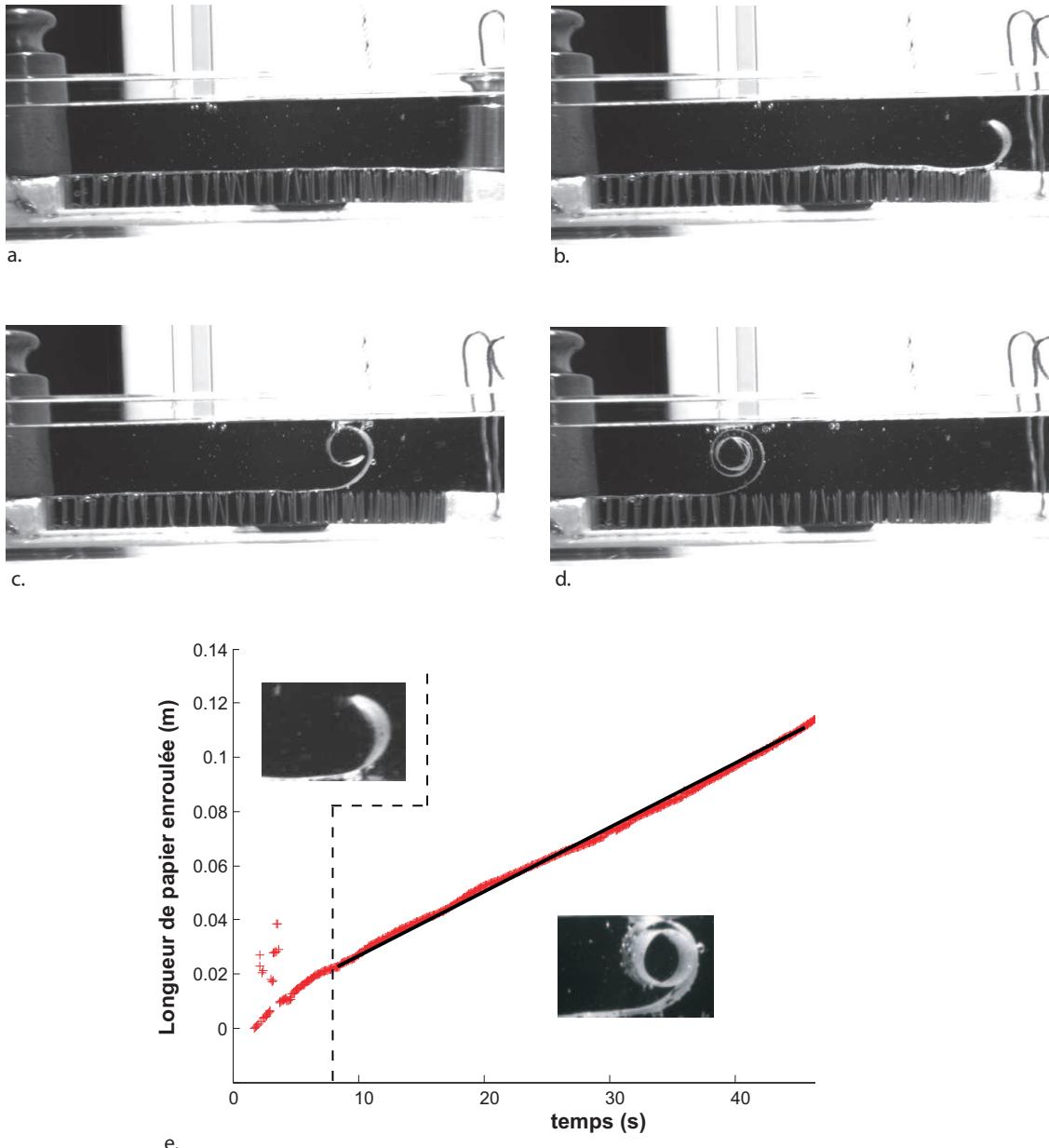


FIGURE 6 – Enroulement du papier Calque 70g recouvert de *scotch®magic* dans de l'huile silicone  $\eta = 573 \text{ Pa.s}^{-1}$ . **a.** position de départ. **b.**  $t=0\text{s}$ . le papier calque quitte la plateforme de lancement et commence à s'enrouler sur le tapis de Fakir. **c.**  $t=3\text{s}$ . **d.**  $t=10\text{s}$ . **e.** mesure de la longueur enroulée au cours du temps via un traitement d'image Matlab.

### 2.3 Méthode de mesure de vitesse

Le système bicouche est imbibé d'eau et forcé en position plane grâce aux deux poids. Le tout est introduit dans la cuve transparente. Pour déclencher la relaxation du système, un des deux poids de maintient est enlevé. Le système s'enroule sur lui-même. Une caméra permet d'acquérir les données sous forme de film. La caméra utilisée est une caméra *PixeLINK<sup>®</sup>* munie d'un objectif grand angle. Les films sont enregistrés via le logiciel *PixeLINK Capture OEM*. Figure 6.

Les films sont enregistrés comme une suite d'images. Le logiciel d'acquisition des données permet de choisir la vitesse d'acquisition de sorte que le temps entre chaque image est parfaitement connu. Une mire permet de retrouver l'échelle de l'image. Les vitesses d'enroulement du système bilame sur lui-même sont mesurées à partir des films enregistrés sur l'ordinateur. Le logiciel Image J permet de mesurer la position du bord du cylindre de papier lors de l'enroulement. On peut ensuite remonter aux vitesses instantanées d'enroulement car on connaît le temps de capture entre chaque image.

Pour simplifier mon travail d'exploitation des données, j'ai écrit un code Matlab pour qu'il mesure directement les vitesses. Cependant ce code est trop précis et demande plus de temps de préparation que la mesure directe à la main. (position du rectangle d'étude sur la photo, niveau de sensibilité, à déterminer préalablement.) Je ne l'ai utilisé que pour vérifier que la vitesse d'enroulement est constante aux temps courts. Figure 6 (e.).

### 2.4 Méthode de mesure de la force d'enroulement

La courbure emmagasinée lors de l'imbibition du papier est le moteur de l'enroulement de notre système. Nous avons mesurée la force mise en jeu lorsque le papier s'enroule.

Une tige de cantilever a été calibrée en trois points de sa longueur. La calibration a été effectuée à l'aide d'une balance ultra précise et d'un vernier de microscope. La tige de cantilever est fixée solidement au vernier de microscope et appuie sur la balance. On mesure la déflexion sur le vernier du microscope. La masse de la balance correspond à la force appliquée sur celle-ci, à l'accélération de la pesanteur près. L'expression de la déflexion d'une poutre :  $\xi = \frac{FL^3}{EI}$  permet de faire correspondre force et déflexion.

où  $\xi$  est la déflexion, F la force appliquée, L la longueur de la tige où la force est appliquée, E le module d'Young et I le moment d'inertie. Figure 7.

Les mesures de force ont été effectuées sur un autre banc expérimental. Le système bicouche (le papier calque recouvert de scotch ou le papier Monoprix) est imbibé d'eau et s'enroule. La tige de cantilever a été préalablement placée sur le chemin de l'enroulement du calque. Lorsque celui-ci s'enroule il rencontre la tige de cantilever et la défléchit. On attend quelque secondes que le système ait complètement relaxé. Figure 7. On prend une photo à ce moment là. Une mire dessinée sur le banc expérimental permet de calibrer les pixels de l'image. Via le logiciel Image J on mesure la déflexion et la position du point de contact entre la tige de cantilever et le système enroulé. On obtient la force d'enroulement à  $C_0$ .

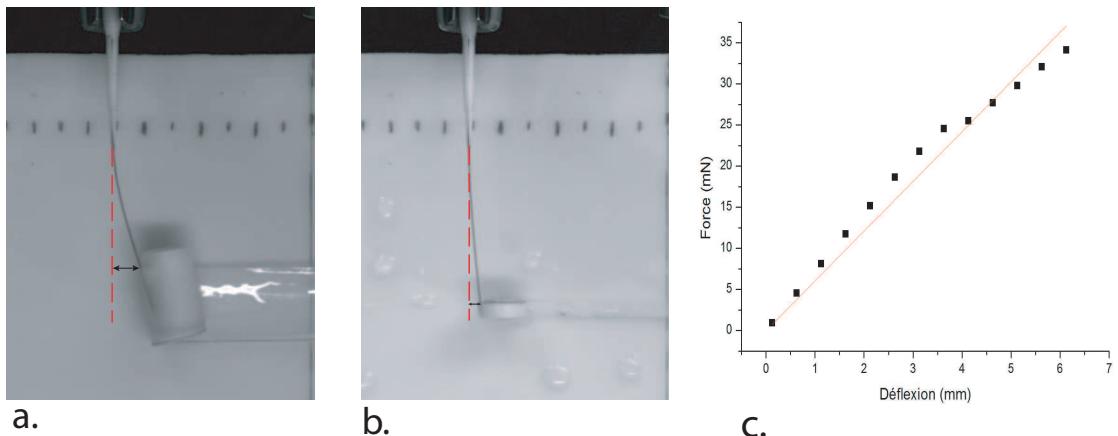


FIGURE 7 – **a.** Déflexion de la tige de cantilever par une bande de calque de 19 mm de large **b.** Déflexion de la tige de cantilever par une bande de calque de 4 mm de large **c.** Calibration de la tige de cantilever. La pente vaut  $6,05 N.m^{-1}$

#### Remarque :

Le placement de la tige de cantilever est le point crucial de la mesure. Il faut placer la tige à l'intérieur du cylindre, en position stable. (Figure 8) Si la tige est mal placée, la tige va être défléchie verticalement, ce qui peut fausser la mesure.

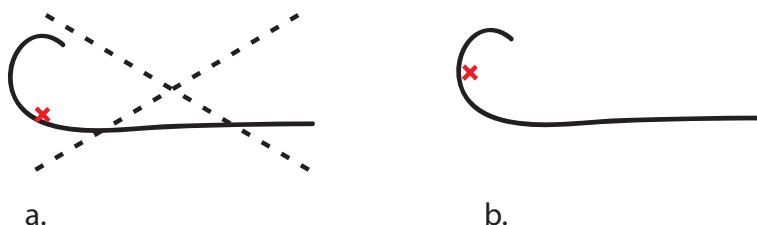


FIGURE 8 – **a.** Déflexion de la tige de cantilever mal placée : erreur de mesure **b.** Déflexion de la tige de cantilever bien placée : la déflexion est uniquement horizontale

### 3 Prédictions théoriques

Tous les calculs sont effectués par unité de largeur.

#### 3.1 Elasticité du système bilame

L'objet de l'étude est un système bilame doté d'une courbure spontanée  $C_0$ . L'expression de l'énergie de courbure pour un système de courbure  $C$  s'écrit :

$$E_{courb} = \frac{1}{2} L \kappa (C - C_0)^2 \quad (1)$$

Avec  $L$  la longueur du système et  $\kappa$  la constante de courbure du bilame. La démonstration de cette formule est jointe en Annexe.

#### 3.2 Force d'enroulement

On va utiliser cette expression (1) de l'énergie de courbure pour déterminer la force d'enroulement par unité de largeur.

Le cylindre s'enroule à partir d'une position initiale plate  $C = 0$ . Considérons que le cylindre s'enroule sur une longueur  $dx$ . Le système lors de cet enroulement a perdu une longueur  $dx$  de papier plat  $C = 0$  et a gagné une longueur  $dx$  de papier courbé avec une courbure  $C$  fixé par le cylindre (en rouge sur la figure 9). Le système a relaxé, il a perdu de l'énergie de courbure.

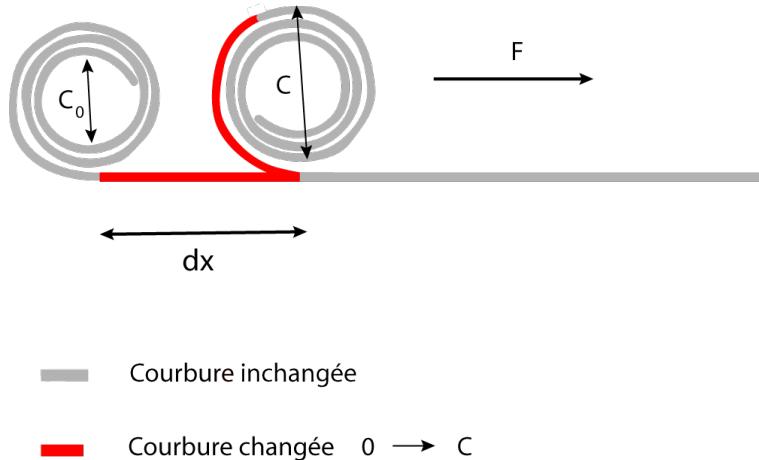


FIGURE 9 – Schéma pour le calcul de la force d'enroulement. Le bilame s'enroule ; la partie rouge, plate au départ, s'est courbée.

Nous allons faire un bilan d'énergie sur les deux configurations système. Seul l'élément en rouge sur la figure 9 a changé de configuration.

$$\Delta E_{courb} = \frac{1}{2} dx \kappa (C - C_0)^2 - \frac{1}{2} dx \kappa (0 - C_0)^2 \quad (2)$$

$$\Delta E_{courb} = \frac{1}{2} dx \kappa (C^2 - 2CC_0) \quad (3)$$

La variation d'énergie de courbure du système sur l'élément de longueur dx correspond à l'opposé du travail de la force de courbure sur la longueur dx. :

$$W_{enroulement} = -\Delta E_{courb} = \kappa \left( CC_0 - \frac{1}{2} C^2 \right) dx \quad (4)$$

et

$$W_{enroulement} = f_{curl} dx \quad (5)$$

Avec (4) et (5), on trouve l'expression de f :

$$f_{curl} = \kappa \left( CC_0 - \frac{1}{2} C^2 \right) \quad (6)$$

Considérons le cas particulier du départ où le système relaxe suivant sa courbure d'équilibre  $C = C_0$ . On retrouve l'expression usuelle de la force d'enroulement :

$$f_{curl} = \frac{1}{2} \kappa C_0^2 \quad (7)$$

L'étude que j'ai mené lors de ce stage sur le papier calque a permis de corriger l'expression théorique de la force de courbure utilisée auparavant pour décrire l'éclatement des polymersomes.

### Hypothèse supplémentaire : Courbure transverse négligeable

Dans une étude théorique complète du système, il faut prendre en compte que l'anisotropie du papier n'est pas totale. La force associée à cet effet n'intervient pas dans la physique du phénomène. Une simple étude d'ordre de grandeur va le prouver. Les valeurs numériques utilisés ici sont celles mesurées pour un système composé de papier calque recouvert de scotch.

$$F_{curl} \sim \frac{1}{R_0^2} \quad \text{et} \quad F_{curl\perp} \sim \frac{1}{R_1^2} \quad (8)$$

l'enroulement transverse est faible. Le rayon d'enroulement orthogonal  $R_1$  est au moins 10 fois plus grand que le rayon principal d'enroulement  $R_0$ . (1 cm pour l'enroulement normal, non mesurable expérimentalement pour l'enroulement transverse). D'après l'expression de la force d'enroulement qui varie comme l'inverse du rayon au carré, la force à vaincre pour enruler le papier dans l'autre sens est au moins cent fois plus petite que la force principale d'enroulement.

$$R_1 \gg R_0 \quad \Rightarrow \quad F_{curl} \gg F_{curl\perp} \quad (9)$$

Pour le papier calque, on peut négliger les effets de courbure transverse. Ce n'est pas vrai pour tous les papiers. Pour d'autres papiers moins isotropes, le problème de la courbure transverse peut devenir important et même stopper l'enroulement. Figure 10.

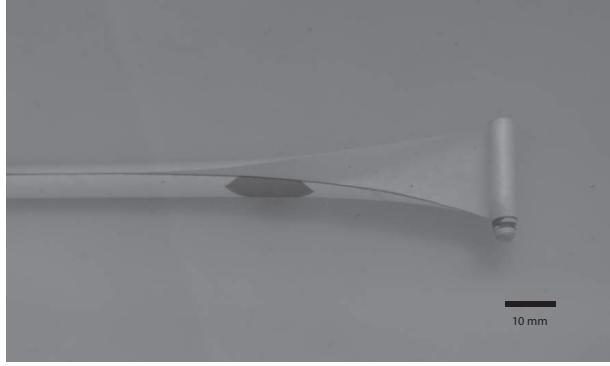


FIGURE 10 – Enroulement stoppé par un gonflement trop isotrope (Papier alimentaire Monoprix du rayon boucherie)

### 3.3 Friction visqueuse

Lors de l'expérience, le système bilame s'enroule sous la forme d'un cylindre. La dissipation visqueuse d'énergie peut avoir deux origines : la dissipation a lieu autour du cylindre (Figure 11 [a.] et [b.]) ou bien les frottements se concentrent dans le coin de liquide entre la bande de papier plate et le cylindre. Expérimentalement, on observe un coin de liquide très large. On néglige dans une première approximation cet effet.

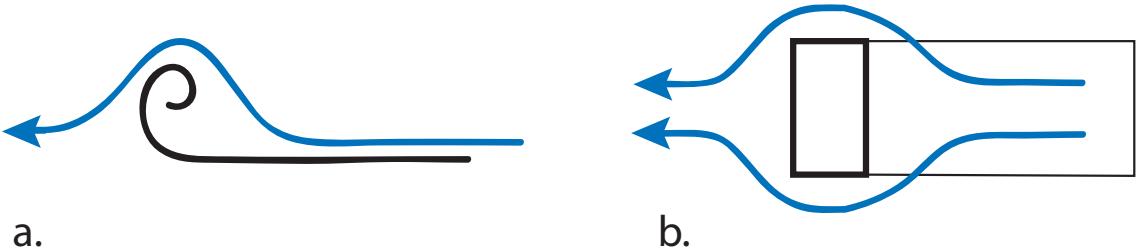


FIGURE 11 – a. Lignes de courant du fluide autour du cylindre s'il était infini (vue de la tranche) b. Effets de dimension finie du cylindre (vue de dessus)

Le déplacement d'un cylindre non rotatif dans un liquide visqueux modélise l'expérience. Le calcul direct de la force de frottement visqueuse via l'équation de Stokes n'est pas possible pour un cylindre (même à très bas Reynolds !). En effet la puissance de dissipation visqueuse par unité de volume évolue en  $1/r$  et diverge à l'infini. Le calcul de la dissipation visqueuse autour d'un cylindre doit être effectué en tenant compte des termes advectifs via l'équation d'Oseen.

L'expression de la dissipation visqueuse [6], pour un cylindre de rayon  $R$  et de largeur  $w$ , se déplaçant à une vitesse  $v$  :

$$F_{visqueux} = \frac{4\pi\eta vw}{\frac{1}{2} + \ln(\frac{w}{R})} \quad (10)$$

Soit, par unité de largeur :

$$f_{visqueux} = \frac{4\pi\eta v}{\frac{1}{2} + \ln(\frac{w}{R})} \quad (11)$$

Comme un logarithme évolue peu, on notera  $\ln(\frac{w}{R})$  comme une constante :

$$\ln\left(\frac{w}{R}\right) = \ln$$

### 3.4 Expression de la vitesse en régime visqueux

Si l'on ne tient pas compte de l'inertie ni de la masse du papier, la force d'enroulement est équilibrée par la force de friction visqueuse. Cet équilibre nous permet de déduire la vitesse d'enroulement.

$$f_{curl} = f_{visqueux} \quad (12)$$

$$f_{curl} = \frac{4\pi}{\frac{1}{2} + \ln} \eta v \quad (13)$$

$$v \sim \frac{f_{curl}}{\eta} \quad (14)$$

### 3.5 Les longues bandes $L > L_0$

J'appelle longues bandes les bandes pour lesquelles l'enroulement est suffisamment long pour qu'on puisse assister à un changement de rayon macroscopique ( $C < C_0$ ) lors de l'enroulement. La longueur caractéristique pour qu'on change de régime est  $L_0 = R_0^2/e$  où  $R_0$  est le rayon initial du cylindre et  $e$  l'épaisseur du système bilame.

L'évolution de la vitesse est comme auparavant donnée par l'équation (11). En explicitant l'expression de la force d'enroulement en fonction du rayon on obtient :

$$v = \left( \frac{1 + 2 \ln}{16\pi} \right) \frac{\kappa (2C_0C - C^2)}{\eta} \quad (15)$$

La conservation du volume du papier au cours de l'enroulement se traduit par :

$$\pi \left( \frac{1}{C^2} - \frac{1}{C_0^2} \right) = e L \quad (16)$$

En combinant ces deux équations, on obtient l'équation différentielle qui régit l'enroulement du système :

$$\frac{dL}{dt} = \left( \frac{1 + 2 \ln}{16\pi} \right) \frac{\kappa}{\eta} \left( \frac{2C_0}{\sqrt{\frac{eL}{\pi} + C_0^{-2}}} - \frac{1}{\frac{eL}{\pi} + C_0^{-2}} \right) \quad (17)$$

Nous allons raisonner en loi d'échelle : si la longueur de bande enroulée est grande devant  $L_0 = R_0^2/e$ , le terme dominant est le terme de plus haut degrés de l'équation (17).

$$\frac{dL}{dt} \sim \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (18)$$

avec l'expression (18), il vient :

$$L \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (19)$$

On peut trouver la dépendance temporelle de la vitesse,

$$v \sim \int_0^t t^{-\frac{1}{3}} dt. \sim t^{-\frac{1}{3}} \quad (20)$$

Enfin, on trouve la dépendance de la vitesse d'enroulement avec la longueur de papier enroulée :

$$v \sim \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (21)$$

## 4 Résultats expérimentaux

### 4.1 Force en fonction du rayon du cylindre : caractérisation statique

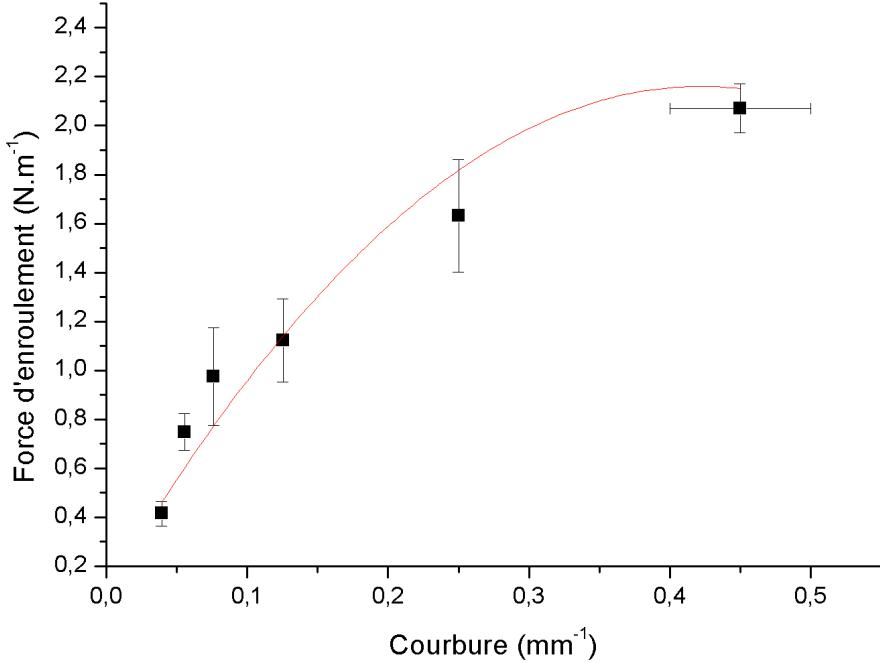


FIGURE 12 – Force en fonction de la courbure pour le papier calque *Canson*®70g recouvert de *scotch*® *magic*. L'ajustement rouge donne  $\kappa = 1,6 \cdot 10^{-5} J$  et  $C_0 = 0,44 \text{ mm}^{-1}$

j'ai mené quelques expériences sur un même système ( du calque *Canson*®70g recouvert de *scotch*® *magic*) en faisant varier le rayon autour duquel le système s'enroule à l'aide de cylindres de plastique très légers. Les résultats obtenus pour des courtes bandes s'accordent bien avec la théorie. On peut alors déterminer les constantes intrinsèques au système ( $C_0$ ,  $\kappa$ ). On trouve :  $\kappa = 1,6 \cdot 10^{-5} J$  et  $C_0 = 0,44 \text{ mm}^{-1}$ . La mesure directe de  $C_0$  avec un pied-à-coulisse donne  $0,46 \text{ mm}^{-1}$ . L'écart est faible compte tenu des nombreuses sources d'erreurs liées à l'expérience (poids des cylindres, relaxation après imbibition, ...). La valeur de  $\kappa$  permet de retrouver le bon ordre de grandeur des forces mises en jeu. L'expérience a permis de retrouver la même dépendance de la force avec le rayon que celle prévue par la théorie ( $f_{curl} = \kappa(C_0 C - \frac{1}{2} C^2)$ ).

### 4.2 Vitesse en fonction de la viscosité

Les mesures ont été effectuées à petit Reynolds pour caractériser de manière simple la dépendance de la vitesse en fonction de la viscosité extérieure. J'ai utilisé des bandes de papier calque recouvertes de scotch ou des bandes de papier alimentaire monoprix de longueur environ 15 cm. Compte tenu des dimensions et des vitesses mises en jeu, les expériences ont été réalisées dans des huiles de silicium visqueuses (tableau 2) pour rester en régime visqueux. Les différentes courbes suivent la prédiction théorique d'une variation de la friction visqueuse en  $1/\eta$

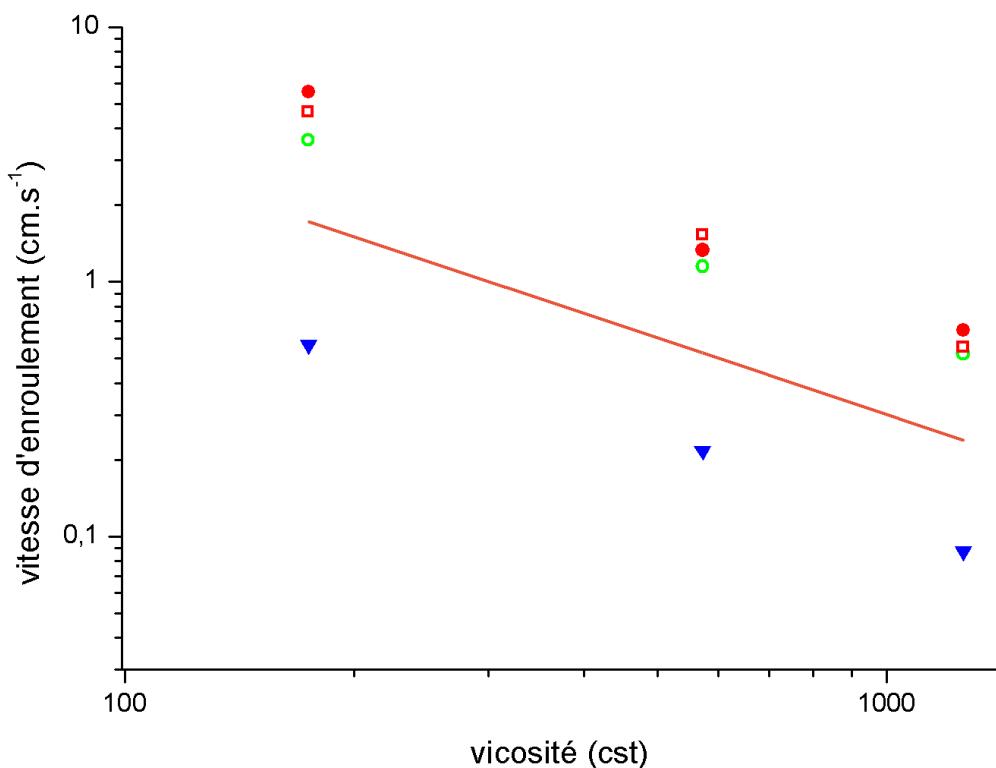


FIGURE 13 – Dépendance de la vitesse en fonction de la viscosité. (○) Bande de papier calque *Canson®* 70g.m<sup>-2</sup> couverte d'adhésif *scotch® magic* de largeur 9,5 mm. (●) Bande de papier calque *Canson®* 90g.m<sup>-2</sup> couverte d'adhésif *scotch® magic* de largeur 19 mm. (□) Bande de papier calque *Canson®* 90g.m<sup>-2</sup> couverte d'adhésif *monoprix* de largeur 9,5mm. (▼) Bande de papier alimentaire *monoprix* de largeur 20 mm. (—) Droite de pente -1.

On remarque sur la courbe une grande différence de vitesse entre le papier alimentaire monoprix ( $\blacktriangledown$ ) et les autres points. Il est a priori surprenant que le papier monoprix soit si lent que sa courbure est beaucoup plus grande que celle des autres papiers. En fait, la constante de courbure du papier monoprix (qui dépend de l'épaisseur du papier avec une loi de puissance en  $e^3$ ) est beaucoup plus faible que celle du papier calque, la force développée par le papier monoprix l'est en conséquence. Il est donc normal que le papier monoprix s'enroule moins vite que le papier calque.

### 4.3 Vitesse en fonction de la force

Dans l'étude théorique précédente, nous avons vu que la vitesse devait dépendre de façon linéaire avec la force d'enroulement. Pour faire varier la force d'enroulement, j'ai étudié plusieurs systèmes de natures différentes, tout en gardant les autres paramètres du problèmes fixes. Les enroulements ont lieu dans de l'huile silicone de viscosité  $0,174 \text{ Pa.s}$ . J'ai caractérisé dans un premier temps la force d'enroulement statique propre à chaque système, puis j'ai mesuré les vitesses d'enroulement.

Expérimentalement, la figure 14 montre une dépendance linéaire de la vitesse avec la force d'enroulement.

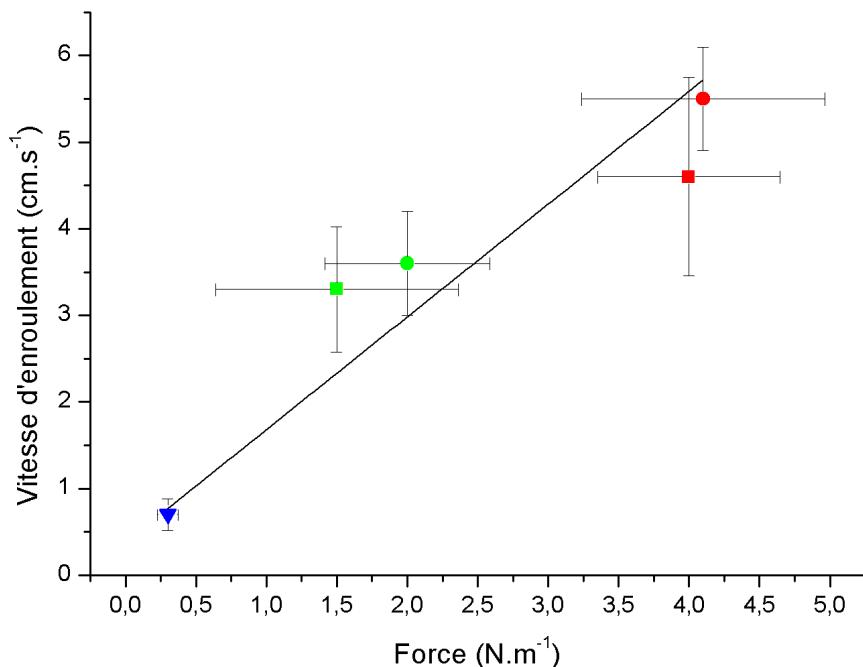


FIGURE 14 – Dépendance de la vitesse en fonction de la force d'enroulement dans l'huile silicone n°2 [ $\eta = 0,174 \text{ Pa.s}$ ]. ( $\blacktriangledown$ ) Bande de papier alimentaire monoprix. ( $\bullet$ ) Bande de papier calque Canson®90g.m⁻² couverte d'adhésif scotch®magic. ( $\blacksquare$ ) Bande de papier calque Canson®90g.m⁻² couverte d'adhésif monoprix. ( $\bullet$ ) Bande de papier calque Canson®70g.m⁻² couverte d'adhésif scotch®magic. ( $\blacksquare$ ) Bande de papier calque Canson®70g.m⁻² couverte d'adhésif monoprix

Si l'on trace la vitesse d'enroulement en fonction du rapport de la force par unité de largeur par la viscosité, toutes les courbes se confondent en une courbe maîtresse. La pente de cette courbe maîtresse

vaut 0.002. En théorie, cela correspond à une valeur de la constante  $\ln \sim -\frac{1}{2}$ . Cette valeur donne un rapport entre la largeur de la bande et le rayon de 0,6. Cette valeur sous estime la réalité à cause des effets de bords (étroitesse de la cuve).

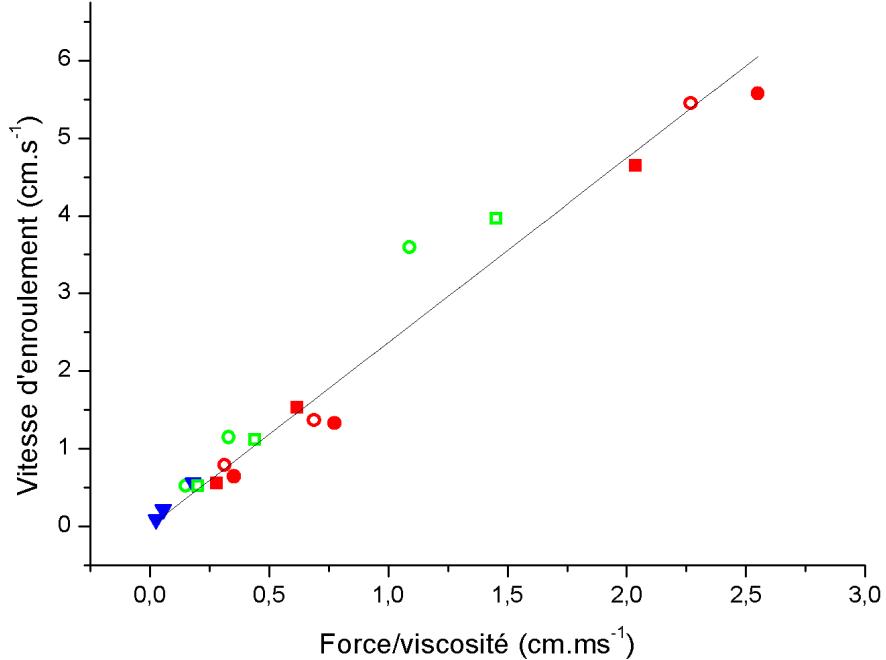


FIGURE 15 – Vitesse en fonction de  $\frac{f}{\eta}$  : Droite maîtresse de pente 0,002. (▼) Bande de papier alimentaire monoprix. (●) Bande de papier calque Canson® 90g.m⁻² couverte d'adhésif scotch® magic de largeur 19 mm. (■) Bande de papier calque Canson® 90g.m⁻² couverte d'adhésif monoprix de largeur 19 mm. (○) Bande de papier calque Canson® 90g.m⁻² couverte d'adhésif scotch® magic de largeur 9,5 mm. (●) Bande de papier calque Canson® 70g.m⁻² couverte d'adhésif scotch® magic de largeur 19 mm. (□) Bande de papier calque Canson® 70g.m⁻² couverte d'adhésif monoprix de largeur 9,5 mm (○) Bande de papier calque Canson® 90g.m⁻² couverte d'adhésif scotch® magic de largeur 9,5 mm.

## 4.4 Enroulement expérimental et discussion

### 4.4.1 Courte bandes ou temps courts : la courbure dynamique

Aux temps courts, on observe une vitesse d'enroulement constante. Ceci est prédit par la théorie (équation 14). La longueur sur laquelle la vitesse d'enroulement est constante est de l'ordre de la longueur caractéristique du problème :  $L_0 = \frac{1}{C_0^2 e} = \frac{(10^{-3})^2}{20 10^{-6}} \sim 5cm$ .

Pour avoir la meilleure précision possible, j'ai traité les données avec un code matlab. On remarque alors que sur près de 15 cm la vitesse d'enroulement ne change pas du tout ( Figure 16). Ceci est surprenant vis à vis de la théorie. Aux temps très courts, la vitesse n'est pas encore constante. Le papier n'a pas encore adopté sa forme cylindrique, la force de friction est donc différente. Une fois

que le premier rouleau est formé, (après les pointillés sur la figure 16) la vitesse d'enroulement est constante.

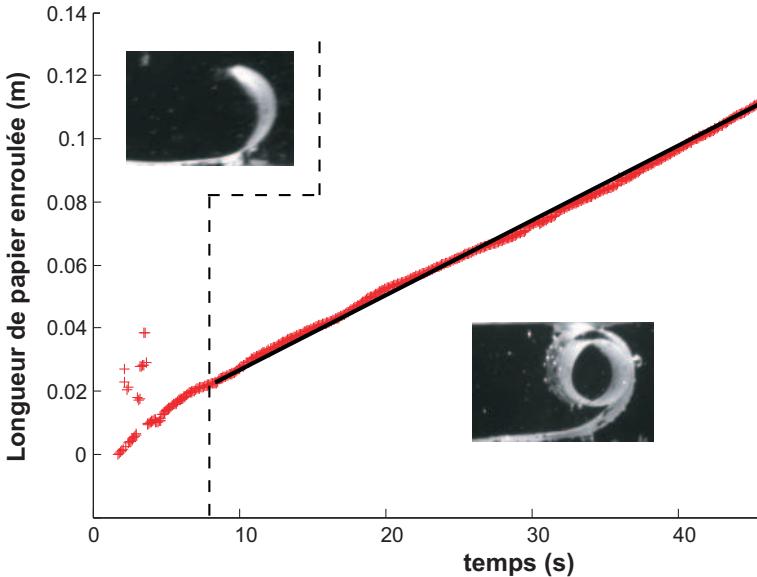


FIGURE 16 – Enroulement aux temps courts : Vitesse d'enroulement constante après une période transitoire.(Papier alimentaire monoprix dans huile de silicium n°2 [ $\eta = 0,574 \text{ Pa.s}$ ])

En fait, en portant un regard attentif sur les images, on se rend compte que le diamètre extérieur du cylindre ne change pas sur les 20 premiers centimètres de l'enroulement ( $C_{\text{dynamique}} < C_0$ ). Il y a une courbure dynamique : Le bilame relaxe rapidement jusqu'à une courbure  $C_{\text{dynamique}}$  puis relaxe doucement vers sa courbure d'équilibre. On a donc une force d'enroulement constante pour s'enrouler avec une courbure  $C_{\text{dynamique}}$  et une force de fiction constante qui frotte sur un cylindre de rayon  $R = 1/C_{\text{dynamique}}$ . La vitesse est donc constante. Sur la figure 16 on remarque qu'aux temps très courts la vitesse d'enroulement est supérieure à la vitesse d'enroulement du régime établi. Cela vient du fait que le cylindre n'est pas encore formé, la friction est différente, l'enroulement est donc plus rapide.

Il reste à comprendre la dynamique de la relaxation. Peut-on prévoir la courbure dynamique ?

Une explication probable au  $C_{\text{dynamique}}$  est que la force pour passer de la configuration plate ( $C=0$ ) à la configuration enroulé à  $C_{\text{dynamique}}$  est grande devant la force pour passer de  $C_{\text{dynamique}}$  à la courbure d'équilibre  $C_0$ . On peut remarquer cet effet sur le graphique présentant la force d'enroulement statique en fonction de la courbure (Figure 12). En se rapprochant de  $C_0$ , la courbe est de plus en plus plate, la différence de force entre les deux est donc de plus en plus faible. La vitesse d'enroulement est donc de plus en plus faible en conséquence. L'enroulement a donc lieu avec une courbure dynamique.

Nous allons essayer de prévoir cette courbure dynamique en exploitant cette idée. Une expérience est en cours sur de tout petits bout de bilame pour avoir une dynamique très précise de l'enroulement initial.

## 4.5 Aux temps longs : Enroulement en régime visqueux

L'expérience consiste à enrouler une bande de papier alimentaire monoprix dans une cuve d'huile silicone de viscosité  $\eta = 0,573 \text{ Pa.s}$ . Pour des raisons de taille de papier et de cuve, l'expérience n'a pas été faite en un seul coup. J'ai accolé plusieurs bandes de papier les unes aux autres, puis je les ai laissées s'enrouler dans la cuve à tour de rôle. La première bande relaxe, puis j'accorde la deuxième bande, elle relaxe, puis j'accorde la troisième et ainsi de suite.

J'obtiens la courbe donnant la vitesse d'enroulement en fonction de la longueur de papier enroulé. Figure 17.

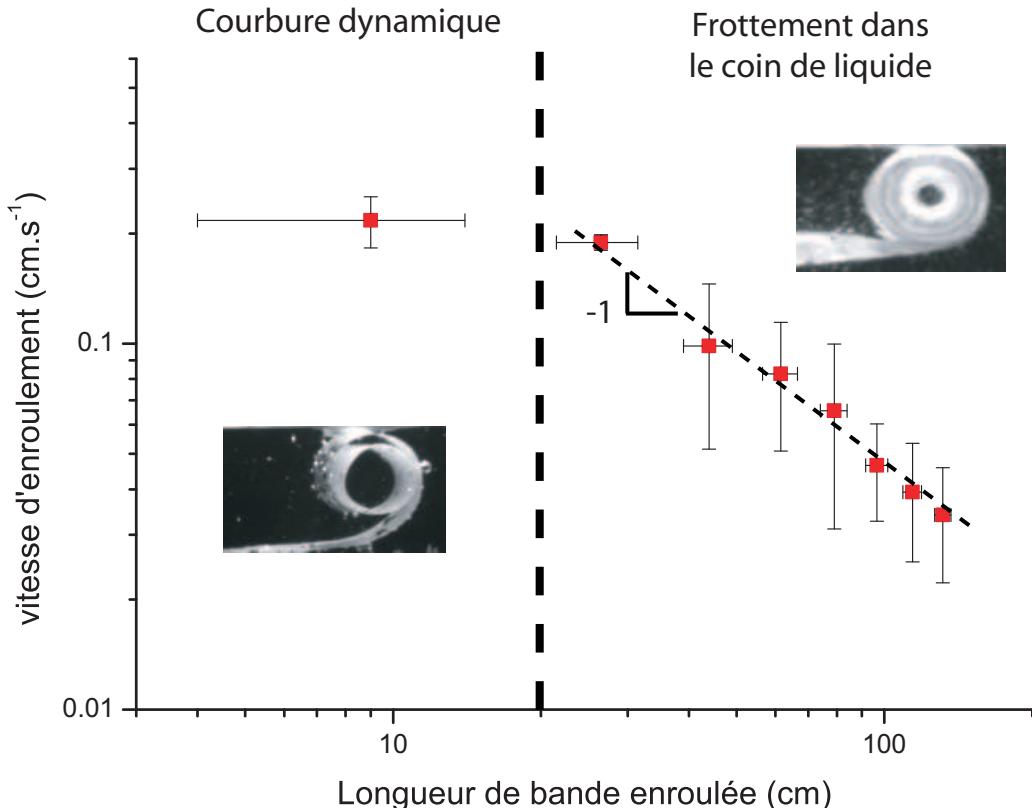


FIGURE 17 – Enroulement aux temps longs. Évolution de la vitesse en  $1/L$  dès que l'enroulement est serré. (Papier alimentaire monoprix dans huile visqueuse 0,573 Pa.s)

On remarque tout de suite qu'il existe une plage où la vitesse est constante (correspondant au  $C_{dynamique}$ ) et une plage où la vitesse décroît (temps longs). Avec l'étude théorique précédente, on s'attend à ce que la décroissance soit en  $1/\sqrt{L}$ . Pourtant le tracé logarithmique donne une décroissance plus forte en  $1/L$ .

## 4.6 discussion de la loi d'échelle d'évolution de la vitesse

L'idée de départ était de décrire ce que nous voyons : un cylindre. Cette description ne tient pas en compte du fait que le cylindre s'enroule sur lui-même. Le coin de liquide étant grand au début de l'enroulement, nous avions décidé de le négliger. La force de friction visqueuse choisie, celle d'un

cylindre se déplaçant à la vitesse  $v$  dans un milieu infini décrit les temps courts, mais devient trop simpliste aux temps longs. On remarque en effet que pour les très longues bandes, l'enroulement se fait de manière serrée autour du cylindre, la dissipation du coin de liquide devient prédominante. Cette dissipation doit être responsable de la loi d'échelle de la vitesse aux temps longs. La friction se fait entre le cylindre et le bout de papier encore plat. On considère que pour un angle  $\theta_1 \sim a/R$  le liquide stagne et il n'y a plus de friction. Le gradient de vitesse est toujours supposé linéaire en  $v/h$  où  $h$  est la hauteur entre le cylindre et le papier plat.  $h = R(1 - \cos(\theta))$ .

L'expression de la force de friction dans le coin de liquide est donnée par :

$$f_{coin} = \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta v R}{h} d\theta \quad (22)$$

$$f_{coin} = \eta v \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos(\theta)} d\theta \quad (23)$$

La fiction se concentre sur les forts gradients, c'est-à-dire pour les  $\theta$  petits.

$$f_{coin} = \eta v \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\theta^2} d\theta \quad (24)$$

Il vient :

$$f_{coin} = \frac{2\eta v}{\theta_1} = \frac{2\eta v R}{a} \quad (25)$$

On peut maintenant retrouver la loi d'échelle de l'évolution de la vitesse en fonction de la longueur de bande enroulée : Aux temps longs,  $f_{curl} \sim L^{-\frac{1}{2}}$  et  $R \sim L^{\frac{1}{2}}$  (équations 6 et 16). Ainsi :

$$f_{curl} = f_{coin} \Rightarrow v L^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} \quad (26)$$

$$v \sim \frac{1}{L} \quad (27)$$

Cette forme de la force de friction donne la bonne loi d'échelle pour l'évolution de la vitesse en fonction de la longueur de la bande. Figure 17. La transition entre la vitesse constante et la décroissance de la vitesse se fait aux alentours des 20 cm. Cette longueur correspond à la longueur de papier nécessaire pour obtenir le  $C_{dynamique}$ .

## 5 Conclusion et perspectives

L'éclatement des polymersomes actifs produit un enroulement de la membrane sur elle-même. Les difficultés expérimentales à manipuler les objets biologiques microscopiques (échelle de taille et de temps très petites) ont motivé l'utilisation d'un système modèle. Ici, un bilame à base de papier modélise la membrane du polymersome.

Le bilame a été analysé sous un angle à la fois expérimental et théorique. Le bilame est une bande de papier calque recouverte de scotch. L'utilisation du papier calque a été favorable à l'étude car il gonfle beaucoup et de manière anisotrope en présence d'eau (croissance de 11% de sa longueur et de 0.5% de sa largeur). Après chargement (immersion du bilame dans l'eau) le dispositif expérimental permet de le lâcher dans le liquide, loin des bords : La friction a lieu en volume. Pour simplifier l'expression de cette force, nous avons travaillé à faible nombre de Reynolds (huiles de silicone). Une étude systématique des paramètres a été engagée : viscosité, force d'enroulement et rayon d'enroulement. Cette étude systématique a permis de vérifier la validité du modèle théorique du bilame (élasticité des solides). Cette étude a permis de mettre en évidence la présence d'un  $C_{dynamique}$  caractéristique des temps courts. Dans un deuxième temps, l'étude s'est porté sur les bandes plus longues, notamment le comportement de la vitesse d'enroulement avec la longueur de papier enroulée. L'expression de la force de friction change : au départ considérée pour un cylindre se déplaçant dans le fluide, on se rend compte qu'après une certaine longueur d'enroulement, l'enroulement de la bande de papier est serré et crée un coin de liquide. La dissipation visqueuse a lieu dans ce coin de liquide. L'évolution de la vitesse avec la longueur de papier enroulée suit alors la loi d'échelle suivante :

$$v \sim \frac{1}{L}$$

L'enroulement de la membrane des polymersomes semble suivre la même loi que celle trouvée pour le papier.

### Perspectives

Le travail sur les systèmes bilames ne s'arrête pas là. Des expériences complémentaires en régime inertiel doivent être menées sur des longues bandes (la théorie est présentée en annexe). La courbure dynamique doit être étudiée et modélisée. Notamment, la dépendance de la courbure dynamique avec la viscosité du milieu. On s'attend à ce que la courbure dynamique diminue avec la viscosité. (l'idée est similaire à celle concernant des polymères longs étirés.)

Enfin, Nous comptons aussi fabriquer un bilame anisotrope à base de PDMS et de gel de Nipam. La fabrication de ce bilame doit nous permettre de contrôler l'expansion de la couche active et donc la courbure grâce à la température.

## 6 Annexe

### 6.1 Expression de l'énergie de courbure

La loi de Hooke (28) décrit la déformation d'un solide lorsqu'il est soumis à une force non cisaillante. Le solide soumis à une force  $F$  sur la surface  $S$  répond par un allongement relatif de sa longueur  $\delta L/L$  proportionnel au module d'Young  $E$ .

$$\frac{F}{S} = E \frac{\delta L}{L} \quad (28)$$

Considérons un système bilamellaire courbé (Figure 19). L'épaisseur de la lamelle 1 est notée  $h_1$ , l'épaisseur de la lamelle 2 est notée  $h_2$ . L'épaisseur totale du système est  $e = h_1 + h_2$ . Soit  $E_1$  (resp  $E_2$ ) le module d'Young de la lamelle 1 (resp 2). La convention d'axe est marquée sur la figure (19). Le rayon de courbure est noté  $R$ . La ligne neutre est la ligne du solide qui n'est pas allongée. Elle est notée en pointillés rouges sur la figure. La ligne neutre est située à une distance  $R + \lambda$  du centre de courbure.

Tous les calculs sont effectués par unité de largeur.

Soit un élément infinitésimal d'épaisseur  $de$  appartenant à la couche ne gonflant pas. cet élément est placé à la distance  $x$  de la base du système bilamellaire (voir Figure 19). De manière géométrique, cet élément a une longueur  $L' = [R + e - x]\theta$ . Son allongement relatif est donc :

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{L' - L}{L} = \frac{e - \lambda - x}{R + \lambda} \quad (29)$$

Pour simplifier les notations on notera  $H = e - \lambda$ . De plus le rayon de courbure  $R$  est très grand devant  $\lambda$  ( $\lambda$  est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du système bilamellaire.) donc  $R + \lambda \sim R$ .

En appliquant la loi de Hooke à cette élongation, on trouve la force infinitésimale par unité de largeur qui étire le solide :

$$\frac{dF}{de} = E_1 \frac{H - x}{R} \quad (30)$$

Cette force travaille sur la longueur étirée du solide. L'énergie de courbure infinitésimale (par unité de largeur) est donc :

$$\frac{dE_{courb}}{de} = \frac{dF}{de} \delta L = E_1 \frac{(H - x)^2}{R} \theta \quad (31)$$

Or,  $L \sim R\theta$ , donc :

$$\frac{dE_{courb}}{de} = E_1 L \frac{(H - x)^2}{R^2} \quad (32)$$

Dans la couche gonflée, on note  $\alpha$  le coefficient de dilatation hygrométrique.  $\alpha > 1$ , par commodité on définit aussi  $\gamma_0 = \alpha - 1$  le coefficient de dilatation relatif. L'élongation s'écrit alors :

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{L' - L_0}{L} = \frac{(R + e - x) - \alpha(R + \lambda)}{R + \lambda} = \frac{(R + e - x) - (1 + \gamma_0)(R + \lambda)}{R + \lambda} \quad (33)$$

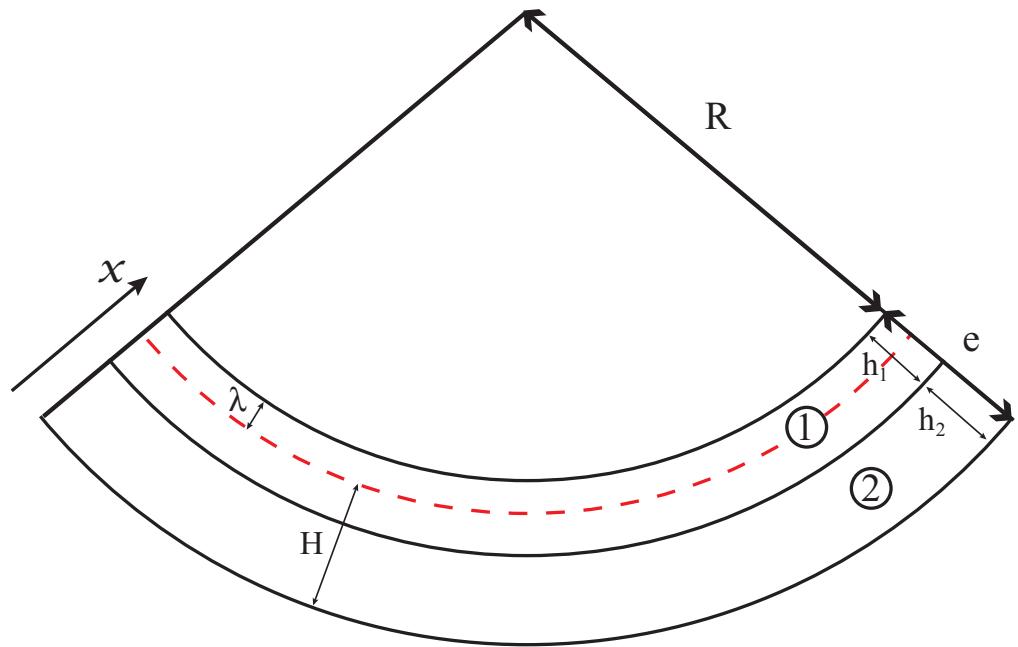


FIGURE 18 – schéma d'un système bilame courbé

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{(H - x) - \gamma_0 R}{R} \quad (34)$$

Avec un raisonnement similaire au précédent, on trouve l'énergie de courbure dans la couche gonflée :

$$\frac{dE_{courb}}{de} = E_2 L \frac{(H - x - \gamma_0 R)^2}{R^2} \quad (35)$$

Pour trouver l'énergie totale, il intégrier les deux expressions sur l'épaisseur de chaque couche.

$$E_{courb} = \int_0^{h_2} E_2 L \frac{(H - x - \gamma_0 R)^2}{R^2} de. + \int_{h_2}^e E_1 L \frac{(H - x)^2}{R^2} de. \quad (36)$$

d'où,

$$E_{courb} = \frac{E_2 L}{3R^2} ((h_2 + \gamma_0 R - H)^3 - (\gamma_0 R - H)^3) + \frac{E_1 L}{3R^2} ((e - H)^3 - (h_2 - H)^3) \quad (37)$$

En réarrangeant l'équation, on peut écrire :

$$\begin{aligned} E_{courb} &= \frac{1}{R^2} \left( \frac{E_2 L}{3} ((h_2 - H)^3 + H^3) + \frac{E_1 L}{3} ((e - H)^3 - (h_2 - H)^3) \right) \\ &+ \frac{1}{R} E_2 L \gamma_0 ((h_2 - H)^2 - H^2) + E_2 L \gamma_0^2 h_2 \end{aligned} \quad (38)$$

Notons la courbure  $C$  telle que  $C = \frac{1}{R}$ . Comme l'énergie est définie à une constante additive près, on peut l'écrire :

$$E_{courb} = \frac{1}{2} L \kappa (C - C_0)^2 \quad (39)$$

Avec  $\kappa$  et  $C_0$  tels que :

$$\kappa = 2 \left( \frac{E_2}{3} ((h_2 - H)^3 + H^3) + \frac{E_1}{3} ((e - H)^3 - (h_2 - H)^3) \right) \quad (40)$$

$$\kappa C_0 = E_2 \gamma_0 (2h_2 H - h_2^2) \quad (41)$$

## 6.2 Éléments de théorie en régime inertiel et visco-inertiel

### 6.2.1 Régime visco-inertiel

On considère ici que la force de friction visqueuse pour les Reynolds intermédiaires. On considère que le fluide dissipe l'énergie à l'intérieur de la couche limite ( $\lambda$ ) de manière visqueuse.

$$f_{visq} \sim \eta \frac{v}{\lambda} R \quad (42)$$

La couche limite est de taille  $\lambda = \sqrt{\nu t} = \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \frac{R}{v}}$ . Ceci nous permet de donner une loi d'échelle de la force de friction :

$$f_{visq} \sim \eta^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

Aux temps longs,  $f_{curl} \sim L^{-\frac{1}{2}}$  et  $R \sim L^{\frac{1}{2}}$  (équations 6 et 16). On en déduit la loi d'échelle d'évolution de la vitesse :

$$\kappa C_0 L^{-\frac{1}{2}} \sim \eta^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

$$\Rightarrow \kappa C_0 \eta^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \sim v^{\frac{3}{2}} L^{\frac{3}{4}} \quad (45)$$

$$\Rightarrow v \sim \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (46)$$

On retrouve la même loi d'évolution que précédemment. Les évolutions temporelles sont les mêmes.

$$v \sim t^{-\frac{1}{3}} \quad L \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (47)$$

La seule différence entre le cas visco-inertiel et le cas visqueux se situe dans les dépendances de la vitesse en masse volumique ( $\rho$ ) et en viscosité ( $\eta$ ).

### 6.2.2 Régime inertiel

Dans ce développement, on tient en compte des effets inertIELS et de la variation de la masse du papier au cours de l'enroulement. L'équation complète qui régit l'enroulement est alors :

$$\frac{dMv}{dt} = f_{curl} \quad (48)$$

En régime inertiel, on néglige complètement la force visqueuse. La masse de papier enroulée s'exprime comme :

$$M = \rho Le \quad (49)$$

On peut écrire l'équation générale développée :

$$\rho e \frac{dLv}{dt} = \kappa C_0^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 + L/L_0}} - \frac{1}{2(1 + L/L_0)} \right)$$

En régime inertiel, on néglige donc la friction visqueuse au profit d'une force de freinage due au changement de la masse du papier. Au temps longs, on peut alors écrire :

$$\rho e v^2 = \kappa C_0^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 + L/L_0}} \right) \quad (50)$$

Soit en loi d'échelle :

$$L^{\frac{1}{4}} \frac{dL}{dt} \sim 1 \quad (51)$$

Enfin :

$$L \sim t^{\frac{4}{5}} \quad \Rightarrow \quad v \sim t^{-\frac{1}{5}}$$

Donc on obtient une dépendance très molle de la vitesse avec la longueur de bande enroulée :

$$v \sim L^{-\frac{1}{4}} \quad (52)$$

### 6.2.3 Limites entre les différents régimes

**Limite entre régime inertiel et régime visqueux :**

$$f_{critique} = \rho e \frac{dLv}{dt} \sim \rho ev^2 = \eta v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\eta}{\rho e} \quad (53)$$

Aux temps courts, la vitesse est donnée par :  $v_0 = \frac{f_{curl}}{\eta}$  On trouve l'expression de la force d'enroulement critique :

$$1 = \frac{\eta^2}{f_{critique} \rho e} \quad (54)$$

**Limite entre régime visco-inertiel et régime visqueux :**

$$f_{critique} = v^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} = \eta v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\eta}{\rho R} \quad (55)$$

Aux temps courts, la vitesse est donnée par :  $v_0 = \frac{f_{curl}}{\eta}$

$$\frac{R}{e} = \frac{\eta^2}{f_{critique} \rho e} \quad (56)$$

**Limite entre régime visco-inertiel et régime inertiel :**

$$f_{critique} = v^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} = \rho v^2 e \quad \Rightarrow \quad v = \frac{R \eta}{\rho e^2} \quad (57)$$

Aux temps courts, la vitesse est donnée par :  $v_0 = \sqrt{\frac{f_{curl}}{\rho e}}$

$$\frac{R^2}{e^2} = \frac{f_{critique} \rho e}{\eta^2} \quad (58)$$

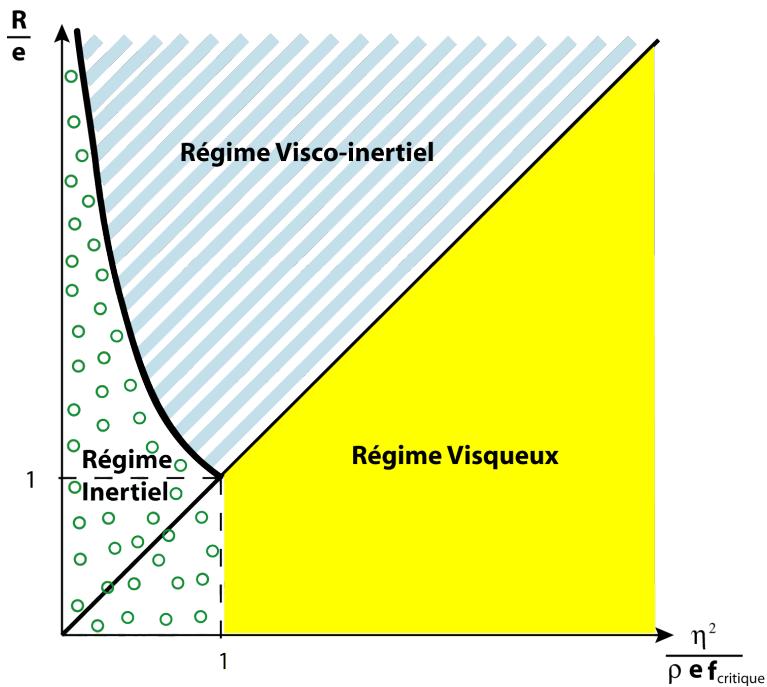


FIGURE 19 – Les différents régimes d'enroulement suivant la valeur des paramètres.

Régime Visqueux	Régime Visco-inertiel	Régime Inertiel
$L \sim t^{\frac{2}{3}}$	$L \sim t^{\frac{2}{3}}$	$L \sim t^{\frac{4}{5}}$
$v \sim L^{-\frac{1}{2}}$	$v \sim L^{-\frac{1}{2}}$	$v \sim L^{-\frac{1}{4}}$

TABLE 3 – Récapitulatif des différentes lois d'échelles selon le régime d'enroulement

## Références

- [1] E. Reyssat and L. Mahadevan. Hygromorphs : from pine cones to biomimetic bilayers. *Journal of the Royal Society Interface*, vol.6 no.39 :951–957, 2009.
- [2] M. Abkarian, G. Massiera, and L. Ramos. Curling and buckling in single red blood cell. In preparation, 2010-2011.
- [3] E. Mabrouk, D. Cuvelier, F. Brochard-Wyart, P. Nassoy, and M-H. Li. Bursting of sensitive polymersomes induced by curling. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, vol.106 no.18 :7294–7298, 2009.
- [4] M. Alava and K. Niskanen. The physics of paper. *Reports on progress in physics*, 69 :669, 2006.
- [5] S. Douezan, M. Wyart, F. Brochard-Wyart, and D. Cuvelier. Curling instability induced by swelling. Submitted, 2010.
- [6] E. Guyon, J-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP sciences, 2001.

## **Remerciements**

Je tiens à remercier Damien Cuvelier, Françoise Brochard-Wyart, Elyes Mabrouk, Stéphane Douézan, David Gonzalez-Rodriguez, Karine Guévorkian, Maxime Lefranc, Louis Salkin, tous membres de l'équipe "Surfaces Douces".

Je remercie aussi les autres personnes de l'UMR 168 qui ont pu être amenées à m'aider au cours du stage.