Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Séance 2 Introduction : Séries de Fourier

La possibilité de décomposer les vibrations périodiques en superpositions de modes dont les fréquences sont des multiples entiers d'une même fréquence fondamentale est suggérée par la musique : les observations sur les cordes vibrantes remontent à l'antiquité. En 1822, Joseph Fourier a transformé cette idée en un outil mathématique, utile pour résoudre les équations de la chaleur.

Cet outil mathématique est très utilisé en mécanique pour caractériser les modes propres des structures, pour déterminer les rugosités, pour résoudre certaines équations différentielles.

1 Harmoniques

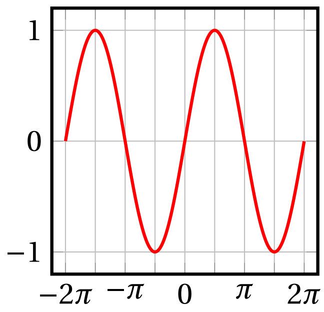
Les fonctions 2π-périodiques élémentaires sont $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \cos(t)$. Les combinaisons linéaires $a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)$ s'appellent les harmoniques pures.

Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. On appelle harmoniques d'ordre k les combinaisons linéaires $a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$. En les superposant, on obtient une grande famille de fonctions 2π-périodiques, de la forme

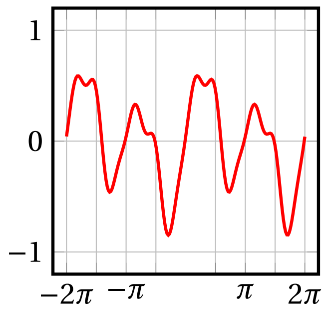
$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).$$

On les appelle *séries trigonométriques.*

2 Quelques exemples pour fixer les idées



$f(x) = \sin(x)$ fonction trigonométrique élémentaire



$f(x) = \sin(x)/4 + \sin(2x)/2 + \cos(4x)/8 - \cos(6x)/12$: Mesure de rugosité sur un palier lisse.

3 Polynômes trigonométriques

Un polynôme trigonométrique, c'est une série trigonométrique qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).$$

On peut définir un produit scalaire entre deux polynômes :

$$P \cdot Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t)Q(t)\,dt.$$

Cas où $n = 1$. Pour l'analogie, un plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'une base de vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Tous les vecteurs du plan peuvent se décomposer sur les vecteurs de base $\vec{u} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$. Pour les fonctions de période T, on peut les décomposer sur la base $\sin(t)$ et $\cos(t)$, $f(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$. Tout se comporte comme si, "$\vec{e}_x \equiv \sin(t)$" et "$\vec{e}_y \equiv \cos(t)$"

En pratique les fonctions de base sont $e_0(t) = 1$, $f_0(t) = 0$ et $e_k(t) = \sqrt{2}\sin(kt)$ et $f_k(t) = \sqrt{2}\cos(kt)$ si $k > 0$. Elles forment forment une base orthonormée de l'espace des fonctions 2π-périodiques. On peut vérifier que les fonctions trigonométriques de base sont orthogonales entre elles et de norme 1:

Si $k \neq m$ (ce raisonnement peut-être étendus aux $e_k \cdot f_m$ et $e_k \cdot f_k$),

$$\begin{aligned}
e_k \cdot e_m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin(kt)\sqrt{2}\sin(mt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos((k-m)t) - \cos((k+m)t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2(k-m)}\sin((k-m)t) - \frac{1}{2(k+m)}\sin((k+m)t)\right]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $k = m$

$$\begin{aligned}
e_k \cdot e_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin(kt)\sqrt{2}\sin(kt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2kt)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4k}\sin(2kt)\right]_0^{2\pi} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Les fonctions trigonométriques de base sont bien orthogonales entre elles et de norme 1.

Identité de Parseval pour les polynômes trigonométriques

Soit $f = \sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{2}\cos(kt) + b_k\sqrt{2}\sin(kt) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t) + b_k e_k(t)$ un polynôme trigonométrique. Alors

$$||f||^2 = f \cdot f = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
f\cdot f &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t) + b_k e_k(t)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(t) + b_j e_j(t)\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_k f_k(t) + b_k e_k(t))\cdot(a_j f_j(t) + b_j e_j(t))\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_k a_j \underbrace{f_k(t)\cdot f_j(t}_{\delta_{k,j}} + b_k a_j \underbrace{e_k(t)\cdot f_j(t)}_{0} + b_k a_j \underbrace{f_k(t)\cdot e_j(t)}_{0} + b_k b_j \underbrace{e_k(t)\cdot e_j(t)}_{\delta_{k,j}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2.\right)
\end{aligned}$$

$\delta_{k,j}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $j{=}k$ et 0 sinon.

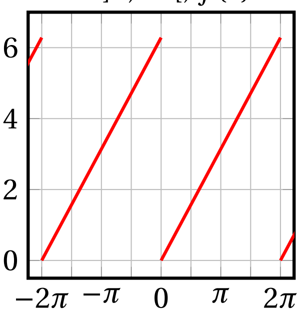
4 Coefficients de Fourier

Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $[0,2\pi]$. Ses coefficients de Fourier sont les nombres

$$a_k = f\cdot f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sqrt{2}\cos(kt)\,dt. \quad \text{et} \quad b_k = f\cdot e_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sqrt{2}\sin(kt)\,dt.$$

Coefficients de Fourier du signal en dents de scie.

Pour $t \in]0,2\pi[$, $f(t) = t$.



Attention, la fonction dent de scie n'est pas impaire !

$$\begin{aligned}
a_0 &= f\cdot f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}\\
&= \pi
\end{aligned}$$

Le coefficient a_0 est la moyenne de la fonction.

$$
\begin{aligned}
a_k &= f\cdot f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\cos(kt)\,dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}k\pi}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{2\pi}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= f\cdot f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\sin(kt)\,dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[-\frac{t\cos(kt)}{k}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(kt)}{k}\,dt\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi}2\pi + \frac{1}{\sqrt{2}k\pi}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{2\pi}\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{k}
\end{aligned}
$$

On peut écrire la fonction sous formes de séries de Fourier,

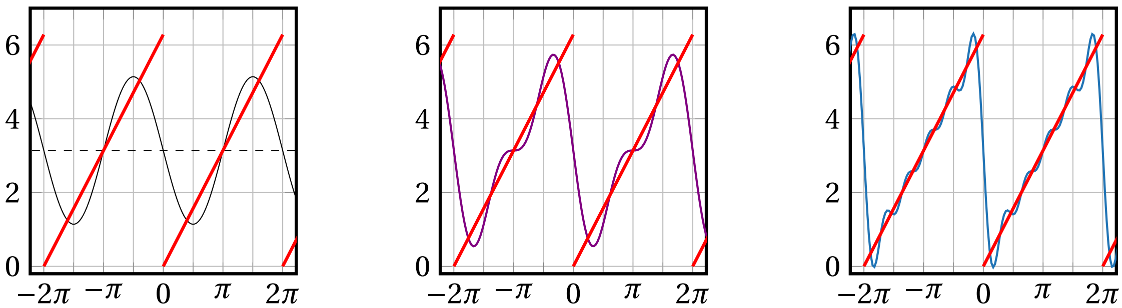
$$
f(t) = \pi + \sum_{k=0}^{n} -\frac{\sqrt{2}}{k}\sqrt{2}\sin(kt) = \pi + \sum_{k=0}^{n}\frac{-2}{k}\sin(kt)
$$

On peut tronquer cette série de Fourier pour comprendre comment la série de Fourier converge vers la fonction,

Pointillés : ordre 0 ;
Noir : ordre 1

Violet : ordre 2

Bleu : ordre 5



Remarques:

1. La définition de la transformée de Fourier n'est pas unique, on peut choisir des intervalles de longueur 2π mais placés différemment, par exemple $[-\pi;\pi]$
2. La normalisation des fonctions de base est parfois différente : le $\sqrt{2}$ peut être absent. Attention, ça change le sens des coefficients de Fourier. (Notamment cela introduit un facteur dans l'identité de Parseval)
3. Si une fonction est impaire alors ses coefficients de Fourier associés aux fonctions de la base de Fourier paires ($e_k(t)$) sont nuls.
4. Si une fonction est paire alors ses coefficients de Fourier associés aux fonctions de la base de Fourier impaires ($f_k(t)$) sont nuls.

5 Fonctions non-périodiques : transformée de Fourier

Les séries de Fourier permettent de passer de l'espace temporel à l'espace fréquentiel. Elles peuvent être utilisées aussi bien pour traiter des signaux temporel (variation d'un son dans le temps qu'un signal spatial, variation d'une rugosité dans l'espace par exemple. Lorsque les fonctions ne sont pas périodiques, on a recours à un outil dérivées des séries de Fourier : la transformée de Fourier. La description fréquentielle passe d'une discrétisation en multiples fréquentiels à un continuum de fréquence.

5.1 Définition de la transformée de Fourier

5.2 Préliminaire : racine n$^{\text{ième}}$ de l'unité

Soit n un entier positif. L'équation $X^n = 1$ possède exactement n solutions $\mathbb{C}$: les racines n-ième de l'unité

$$x_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad 0 \leq k < n, \quad \text{car} \quad x_k^n = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = e^2 i k\pi = (e^{2i\pi})^k = 1^k = 1$$

5.3 Définition de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ est la fonction $\tilde{f}(\omega)$,

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

On définit la transformée de Fourier inverse,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

On rappelle que i est le nombre imaginaire pur $i^2 = -1$ et que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

La transformée de Fourier utilise les fonctions sinusoïdales de différentes fréquences comme fonctions de base. Si $f(t)$ est un signal temporel alors $\tilde{f}(\omega)$ est appelé spectre de ce signal.

5.4 Exemple de transformée de Fourier

Prenons un exemple de traitement du signal. Le filtre passe-bas (qui laisse passer les basses fréquences) de fréquence de coupure ω_c s'écrit

$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Quelle est sa réponse impulsionnelle ?

Propriété : La réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier inverse de la réponse en fréquence du système considéré.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Pour le filtre passe bas idéal,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\omega_c} 0\times e^{i\omega t}\,d\omega + \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\times e^{i\omega t}\,d\omega + \int_{\omega_c}^{+\infty} 0\times e^{i\omega t}\,d\omega\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega t}\,d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{-\omega_c}^{\omega_c}\\
&= \frac{1}{2i\pi t}\,\frac{e^{i\omega_c t}-e^{-i\omega_c t}}{2i}\\
&= \frac{\sin\omega_c t}{\pi t} \qquad \text{car} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}
\end{aligned}$$

5.5 Convolution de deux signaux

Le produit de convolution est une opération mathématique permettant d'analyser un signal par rapport à un autre (par exemple de comprendre à quel point ils se ressemblent). Le produit de convolution de f(t) par g(t) s'écrit

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

La transformée de Fourier de la convolution de deux signaux est le produit de leurs transformées de Fourier. $TF((f*g)) = \tilde{f}\tilde{g}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
TF((f*g)) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{i\omega t}\mathrm{d}t\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau \qquad \text{inversion des intégrales}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{i\omega(t-\tau+\tau)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{i\omega(t-\tau)}e^{i\omega\tau}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{i\omega u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\tau \qquad \text{Changement de variable } t-\tau=u\\
&= \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega)
\end{aligned}$$

Inversement, la tranformée de fourier du produit de deux signaux est les convolution de leurs transformées de Fourier $T(fg) = (\tilde{f}*\tilde{g})/2\pi$.

5.6 Transformées de Fourier : dérivation

La transformée de la dérivée :

$$\tilde{f'} = i\omega\tilde{f}$$

La démonstration fait intervenir une intégration par partie.