Séance 1 Développements limités

Le but de ce nouveau chapitre est d'essayer d'approcher des fonctions à l'aide de polynômes. Cet outil mathématique est indispensable pour linéariser des problèmes non-linéaires (par exemple le problème du pendule pesant), chercher des approximations, calculer des limites.

1 Formule de Taylor

Soit f une fonction n fois dérivable au voisinage de x_0, alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + (x-x_0)^n\varepsilon(x).$$

avec $\varepsilon(x)$ une fonctions telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to x_0$.

Si la fonction est $n+1$ fois dérivable, on peut exprimer la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

1.1 Démonstration

La démonstration se fait grâce à la formule des intégrations par parties et par récurrence.

1. **Initialisation**

   On part de la définition de l'intégrale, $f(x) - f(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(x)\mathrm{d}x$.

   On effectue ensuite une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} 1 \times f'(t)\mathrm{d}t = \Big[-(x-t)f'(t)\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -(x-t)f''(t)\mathrm{d}t \\
f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-t)f''(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   On a vérifié la formule de Taylor à l'ordre 1.

2. **Hérédité**

On suppose que la formule de Taylor est vraie à l'ordre $n-1$,

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

Vérifions que cette formule est vraie au rang n,

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}f^{(n)}(t)\right]_{x_0}^{x} - \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} -\frac{(x-t)^n}{n}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

En remarquant que $\frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}$, on obtient la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n}}{n!}f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n}}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

3. **Convergence**

On peut montrer que le reste intégral est dominé par $(x-x_0)^n$ (lien entre la formule de Taylor et la formule de Taylor avec reste intégral).

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(x-x_0)^n}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| &< \left|\frac{1}{(x-x_0)^n}\right|\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right| \\
&< \left|\frac{1}{(x-x_0)^n}\right|\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\max\left(f^{(n+1)}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&< \left|\frac{\max\left(f^{(n+1)}\right)}{(x-x_0)^n}\right|\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t\right| \\
&< \left|\frac{\max\left(f^{(n+1)}\right)}{(x-x_0)^n}\right|\left|\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{x_0}^{x}\right| \\
&< \left|\frac{\max\left(f^{(n+1)}\right)}{(x-x_0)^n}\right|\left|\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \\
&< \left|\frac{\max\left(f^{(n+1)}\right)}{(n+1)!}\right||x-x_0| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

2 Utilisation de la formule

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$.

   (a) Calculer les dérivées successives de f en 0.

   $$g'(0) = 1, \quad g''(0) = 1, \quad g'''(0) = 1, \quad \ldots$$

(b) Déterminer $g^{(n)}(0)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$$g^{(n)}(0) = 1$$

(c) En déduire le développement limité de la fonction exponentielle en 0 à l'ordre n.

$$\exp(x) = 1 + 1 \times (x-0) + 1 \times \frac{(x-0)^2}{2!} + \ldots + 1 \times \frac{(x-0)^n}{(n)!} + o((x-0)^n).$$

donc

$$\exp(x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

(a) Calculer les dérivées successives de f en 0.

$$f'(0) = \cos(0) = 1, \quad f''(0) = -\sin(0) = 0, \quad f'''(0) = -\cos(0) = -1, \quad f^{(4)} = \sin(0) = 0, \ldots$$

(b) Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$$\text{Les dérivées paires} \quad f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{et les impaires} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

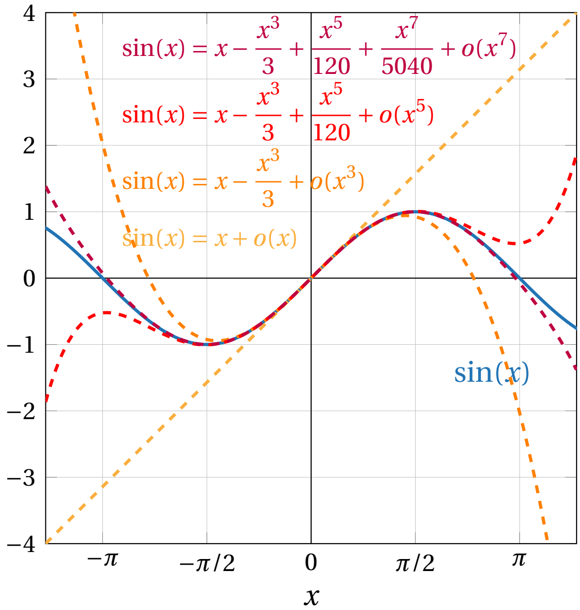
(c) En déduire le développement limité de la fonction sinus en 0 à l'ordre n.

$$\sin(x) = 0 + 1 \times (x-0) - 0 \times \frac{(x-0)^2}{2!} + \ldots + 0 \times \frac{(x-0)^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \frac{(x-0)^{2n+1}}{(2n+1)!} + o((x-0)^{2n+1}).$$

donc

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On peut approximer une fonction avec son développement limité. Sur les graphiques qui suivent, on a tracé la fonction sinus ainsi que la partie régulière de son développement limité aux ordres 1, 3, 5 et 7. Plus le développement est élevé plus la fonction est bien approchée.


$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\sin(x) = x + o(x)$
$\sin(x)$
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
$-\pi$
$-\pi/2$
0
$\pi/2$
π
x

3 Développements limités usuels ($x \to 0$)

Exponentielles et fonctions hyperboliques

e^x	$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	Exponentielle
$\sinh(x)$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$	Sinus Hyperbolique. Partie impaire de l'exponentielle.
$\cosh(x)$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$	Cosinus Hyperbolique. Partie paire de l'exponentielle.
$\ln(1-x)$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$	Logarithme

Fonctions trigonométriques

$\sin(x)$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$	Sinus. Fonction impaire.
$\cos(x)$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$	Cosinus. Fonction paire.
$\tan(x)$	$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$	Tangente. Fonction impaire.

Fonctions inverses et puissances

$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$	Inverse.
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	Inverse (on l'obtient en remplaçant x par $-x$ dans la précédente.)
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots$ $+\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	Puissance

4 Opérations sur les développements limités

4.1 Combinaison linéaire (addition, soustraction, multiplication par un réel)

Soient f et g admettant un développement limité en x_0, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Soient $P(x-x_0)$ et $Q(x-x_0)$ les parties régulières de ces développements limités. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité en x_0 de partie régulière $\lambda P + \mu Q$.

La démonstration est simple.

$$f(x)=P(x-x_0)+\mathrm{o}((x-x_0)^n) \quad \text{et} \quad g(x)=Q(x-x_0)+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

On en déduit

$$(\lambda f+\mu g)(x)=(\lambda P(x-x_0)+\mu Q(x-x_0))+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Les $o\big((x-x_0)^n\big)$ signifient avec un terme négligeable devant $(x-x_0)^n$, ils ne s'additionnent donc pas.

4.2 Produit

Soient f et g admettant un développement limité en x_0. Soient $P(x-x_0)$ et $Q(x-x_0)$ les parties régulières de ces développements limités. Alors fg admet un développement limité en x_0. Sa partie régulière est obtenue comme troncature à l'ordre n de $P(x-x_0)\times Q(x-x_0)$.

Exemple :

Obtenir un développement limité du produit $\cos\sin$ à l'ordre 4 en $x_0=0$.

On écrit

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4) \quad \text{et} \quad \sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$$

Le produit des parties régulières donne :

$$(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!})(x-\frac{x^3}{3!})=x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{8}-\frac{x^7}{144}=x-\frac{2x^3}{3}+\mathrm{o}(x^4)$$

Les termes en x^5 et x^7 sont négligeables devant x^4 lorsque $x\to 0$, ils rentrent donc dans le $o(x^4)$.

D'où

$$\cos(x)\sin(x)=x-\frac{2x^3}{3}+\mathrm{o}(x^4)$$

4.3 Composition

Soient f admettant un développement limité en x_0 et g admettant un développement limité en X_1). Supposons de plus $g(X_1)=x_0$. Soient P et Q les parties régulières de ces développements limités. Alors fog admet un développement limité en x_0. Sa partie régulière est obtenue comme troncature à l'ordre n de PoQ.

Exemple :

Obtenir un développement limité de la fonction composée $\exp(\sin(x))$ à l'ordre 3 en $x_0=0$.

On écrit

$$\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

On effectue la composition des développements limités,

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{\left(x-x^3/6\right)^2}{2}+\frac{\left(x-x^3/6\right)^3}{6}+o(x^3)\\ &= 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{\left(x^2-x^4/3+x^6/36\right)}{2}+\frac{\left(x^3-x^5/2+x^7/12-x^9/216\right)}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

On enlève les termes négligeables devant x^3 (les termes de degré supérieur à 3)

$$= 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

4.4 Primitivation de développements limités

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f' admet un développement limité en x_0, de partie régulière $x \to a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$, alors f admet un un développement limité en x_0 de partie régulière $x \to f(x_0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

4.4.1 Logarithme

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\mathrm{o}(x^n)$$

Par primitivation de DL, on en déduit immédiatement que

$$\ln(1)-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\dots+\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}(x^n)$$

donc

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\dots-\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}(x^n)$$

4.4.2 Arctangente

On a $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Or par composée de développements limités,

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8+\dots+(-1)^n x^{2n}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$$

Par primitivation de développements limités, on obtient

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+2})$$

4.4.3 Fonctions circulaires réciproques

On a $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

De même que précédemment, on obtient pour tout n

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + 1\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}x^{2n} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

d'où en primitivant

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{3}{8.5}x^5 + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

Le développement limité de arccos s'obtient immédiatement en remarquant que $\arccos + \arcsin = \pi/2$ sur $[-1,1]$:

$$\arccos(x) = \pi/2 - x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{3}{8.5}x^5 - \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

4.5 Dérivation de développements limités

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f admet un développement limités en x_0 de partie régulière P et si f' admet un développement limité en x_0 de partie régulière Q, alors $P' = Q$.

5 Calculs pratiques de développements limités

- Calculons le développement limités à l'ordre 4 en $x_0 = 1$ de $f : x \to \frac{1}{\exp(x)}$.

  Pas besoin ici de sortir des calculs compliqués. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \exp(-x)$, et Taylor-Young nous donne immédiatement le résultat :

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{e} - \frac{(x-1)}{e} + \frac{(x-1)^2}{2!e} - \frac{(x-1)^3}{3!e} + \frac{(x-1)^4}{4!e} + \mathrm{o}((x-1)^4)$$

- Calculons le développement limités à l'ordre 3 en $x_0 = 1$ de $f : x \to \frac{1}{\exp(x)+x}$.

  Dans les formules à connaître, les développements limités sont en 0.

  Étape 1 : Effectuer un changement de variable pour se ramener en 0

  Ici on choisit le changement de variable $x \leftrightarrow t+1$.

  On obtient

$$\frac{1}{\exp(x)+x} = \frac{1}{\exp(t+1)+t+1}$$

  Étape 2 : Commencer par calculer les développement composés à l'ordre désiré.

  À l'ordre 3 en 0, on a

$$\exp(t+1)+t+1 = e\exp(t)+t+1 \underset{t\to o}{=} e+1+(e+1)t+\frac{e}{2}t^2+\frac{e}{3!}t^3+\mathrm{o}(t^3)$$

Étape 3 : On se ramène à une forme connue en factorisant

Pour calculer le développement limité d'un quotient, on cherche à se ramener à une composition avec $x \to \dfrac{1}{1\pm x}$ avec $x \to 0$. On factorise par $e+1$ pour arriver à cette forme.

$$\begin{aligned}\frac{1+e}{\exp(t+1)+t+1} &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{1+t+\frac{e}{2(e+1)}t^2+\frac{e}{3!(e+1)}t^3+\mathrm{o}(t^3)}\\ &= 1-\left(t+\frac{e}{2(e+1)}t^2+\frac{e}{3!(e+1)}t^3+\mathrm{o}(t^3)\right)\\ &+\left(t+\frac{e}{2(e+1)}t^2+\frac{e}{3!(e+1)}t^3+\mathrm{o}(t^3)\right)^2\\ &-\left(t+\frac{e}{2(e+1)}t^2+\frac{e}{3!(e+1)}t^3+\mathrm{o}(t^3)\right)^3+\mathrm{o}(t^3)\end{aligned}$$

Étape 4 : Développer et tronquer les développements limités.

$$\frac{1+e}{\exp(t+1)+t+1} \underset{t\to 0}{=} 1-t+1/2\frac{e+2}{e+1}t^2-1/6\frac{e+6}{e+1}t^3+\mathrm{o}(t^3)$$

Étape 5 : Exprimer le développement limité avec sa variable initiale.

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{e+1}-\frac{1}{e+1}(x-1)+1/2\frac{e+2}{(e+1)^2}(x-1)^2-1/6\frac{e+6}{(e+1)^2}(x-1)^3+\mathrm{o}((x-1)^3)$$