

Séance 4 Longueurs, aires et volumes

1 Application aux calculs de longueurs

La longueur peut être calculée à partir d'une fonction, d'une courbe paramétrée ou bien en abscisse curviligne. Les expressions correspondant à chaque paramétrage sont données ci-dessous,

FONCTION	COURBE PARAMÉTRÉE	ABSCISSE CURVILIGNE
$L \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$	$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$	$L = \int_{s_0}^{s_1} ds$

1.1 Exemple 1

Calculer la longueur de la courbe $y = 3x^{2/3} - 10$ entre les points (8, 2) et (27, 17).

Ici, on peut utiliser directement la formule des fonctions,

$$L = \int_8^{27} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x^{1/3}}\right)^2} dx = \int_8^{27} x^{-1/3} \sqrt{x^{2/3} + 4} dx$$

On effectue le changement de variable $u = x^{2/3} + 4$, bornes $u_0 = 8^{2/3} + 4 = 8$ et $u_1 = 27^{2/3} + 4 = 11$,
incrément $du = \frac{2}{3} x^{-1/3} dx$

$$L = \int_8^{11} \frac{3}{2} \sqrt{u} du = \left[u^{3/2} \right]_8^{11} = 11\sqrt{11} - 8\sqrt{8}$$

1.2 Exemple 2

Calculer le périmètre d'un cercle défini par la courbe paramétrée $x = R \cos(t)$, $y = R \sin(t)$ pour t variant de 0 à 2π . Ici, on peut utiliser directement la formule des courbes paramétrées,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 (\sin^2(t) + \cos^2(t))} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2} dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R$$

2 Application aux calculs d'aire

2.1 Ellipse

Une ellipse est décrite en paramétrage polaire par l'équation

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

. $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ est l'excentricité de l'ellipse et $p = \frac{b^2}{a}$ le paramètre. a et b sont appelés demi-grand axe et demi-petit axe.

On peut écrire l'intégrale en coordonnées cartésiennes :

$$A = \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy dx = \int_{-b}^b \int_{-a\sqrt{1-(y/b)^2}}^{a\sqrt{1-(y/b)^2}} dx dy$$

On peut la calculer directement,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} dy dx = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \\ &= 2ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du \quad (u = \frac{x}{a}, \text{ bornes } [-1, 1], \text{ incrément } a du = dx) \\ &= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt \quad (u = \sin(t), \text{ bornes } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ incrément } du = \cos(t) dt) \\ &= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = ab \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab \end{aligned}$$

3 Application aux calculs de volume

3.1 Ellipsoïde

Un ellipsoïde (forme de ballon de rugby) est décrit par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

On peut écrire l'intégrale en coordonnées cartésiennes :

$$A = \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \int_{-c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}}^{c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}} dz dy dx$$

On peut la calculer directement,

$$\begin{aligned}
 A &= 2c \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dy dx \\
 &= 2c \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b\sqrt{1-(x/a)^2}}\right)^2} dy dx \\
 &= 2bc \int_{-a}^a 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{y}{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \\ \text{Bornes : } [-1, 1] \\ \text{Incrément : } b\sqrt{1-(x/a)^2} du = dy \end{array} \right. \\
 &= 2bc \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx \\
 &= \pi bc \left[x - \frac{a}{3} \left(\frac{x}{a}\right)^3 \right]_{-a}^a = \frac{4\pi}{3} abc
 \end{aligned}$$

4 Centre d'inertie et second moment d'aire

4.1 Centre d'inertie

On appelle centre d'inertie d'un solide la barycentre des masses élémentaire . Chaque volume élémentaire dv affectés des coefficients des masses élémentaires dm participe à la définition du barycentre,

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_V \vec{OX} dm$$

où M est la masse totale du solide, $M = \int_V dm$ et O un point quelconque de l'espace. Pour un solide homogène (masse volumique constante ρ) dans un repère cartésien,

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\int_V \rho dx dy dz} \begin{pmatrix} \int_V x dx dy dz \\ \int_V y dx dy dz \\ \int_V z dx dy dz \end{pmatrix} = \frac{\rho}{M} \begin{pmatrix} \int_V x dx dy dz \\ \int_V y dx dy dz \\ \int_V z dx dy dz \end{pmatrix}$$

En pratique, le centre de gravité est toujours confondu avec le centre d'inertie. Dans quelques cas, pour de très grand objets spatiaux, le champ de pesanteur n'est pas uniforme et le centre de gravité et le centre d'inertie ne sont plus confondus.

Propriétés des centres d'inerties pour les solides homogènes :

1. Si le solide possède des symétries matérielle, son centre d'inertie est nécessairement situé sur ces éléments de symétrie.

Exemple 1 : la sphère possède une symétrie ponctuelle par rapport à son centre. le centre d'inertie est donc le centre de la sphère.

Exemple 2: Un parallélépipède rectangle possède 3 plans de symétrie. Le centre d'inertie appartient à chacun de ces plans, c'est donc le point d'intersection de ces trois plans.

2. Si le solide peut être décomposé en une somme de systèmes matériels simples, le centre d'inertie global s'obtiendra en recherchant le barycentre des centres d'inertie partiels affectés de leurs masses respectives.

4.2 Moment d'inertie, opérateur d'inertie.

On appelle moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe (G, \vec{u}) l'intégrale, calculé par rapport au centre de gravité G ,

$$I_{G, \vec{u}} = \int_V r^2 dm, \text{ pour un solide homogène } I_{\Delta} = \int_V \rho r^2 dx dy dz$$

où r représente la distance à l'axe (G, \vec{u}) d'un point matériel affecté de la masse dm .

Théorème de Huyghens

Si l'on connaît $I_{(G, \vec{u})}$ au centre de gravité G , on peut déplacer le point du calcul du centre d'inertie au point A :

$$I_{(G, \vec{u})} = I_{(A, \vec{u})} + Md^2$$

avec M la masse totale du solide considéré et d la distance entre G et A orthogonale à \vec{u} .

Opérateur d'inertie

L'opérateur d'inertie permet de calculer le moment d'inertie selon n'importe quel axe, il est calculé au centre d'inertie,

$$I_{\equiv G} = \begin{pmatrix} \int_V (y^2 + z^2) dm & -\int_V xy dm & -\int_V xz dm \\ -\int_V xy dm & \int_V (x^2 + z^2) dm & -\int_V yz dm \\ -\int_V xz dm & -\int_V yz dm & \int_V (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

À partir de cette matrice, on peut calculer le moment d'inertie vers n'importe quel axe \vec{u} ,

$$I_{G, \vec{u}} = I_{\equiv G} \cdot \vec{u}$$

en discrétisant le calcul avec $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$,

$$I_{\Delta}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \int_V (x_2^2 + x_3^2) dm & -\int_V x_1 x_2 dm & -\int_V x_1 x_3 dm \\ -\int_V x_1 x_2 dm & \int_V (x_1^2 + x_3^2) dm & -\int_V x_2 x_3 dm \\ -\int_V x_1 x_3 dm & -\int_V x_2 x_3 dm & \int_V (x_1^2 + x_2^2) dm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$