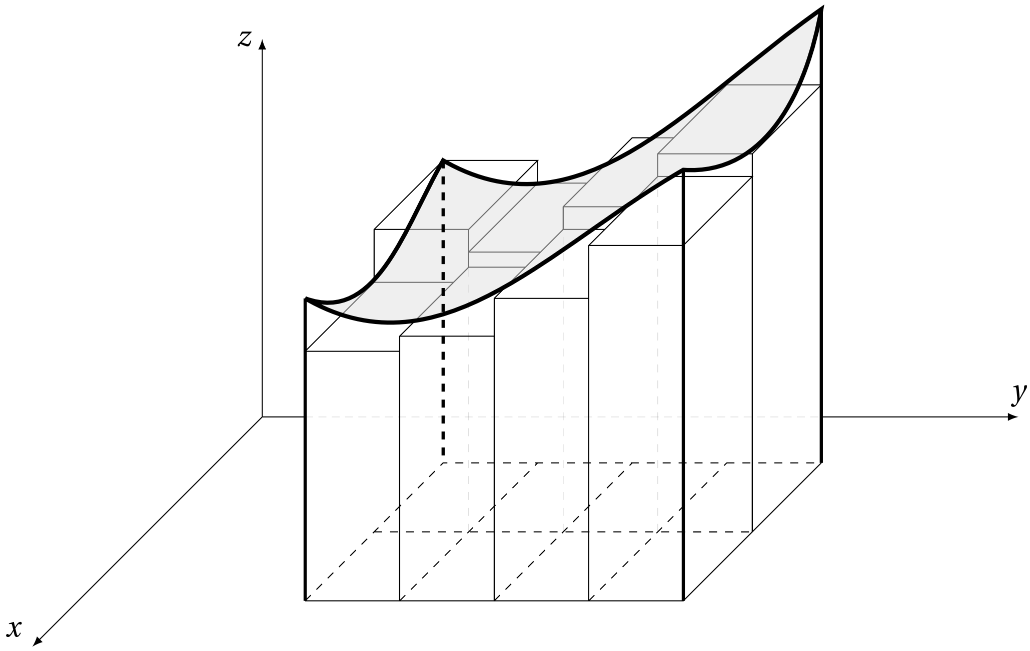
Séance 3 Intégrales doubles / triples

1 Intégrales multiples

La notion d'intégrales multiples est l'extension aux fonctions de plusieurs variables réelles de la notion d'intégrale. Ici, on se restreindra à l'étude des fonction de 2 (surfaces) ou 3 (volume) variables.

1.1 Intégrales doubles

1.2 Intégrale double vue comme le volume sous la surface



Comme pour l'intégrale simple où l'on construisait des rectangles pour approximer l'aire sous la courbe, ici on construit des pavés pour approximer le volume sous la surface. C'est l'idée de la démonstration de la convergence de l'intégrale par sommes de Riemann.

1.3 Succession d'intégrales simples - Théorème de Fubini

Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ avec $(a < b, c < d)$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)$ une fonction continue. Pour $x \in [a,b]$ fixé, la fonction partielle $f_x : [c,d] \to \mathbb{R}$ définie par $f_x(y) = f(x,y)$ est intégrable sur $[c,d]$. Le nombre $\displaystyle\int_c^d f_x(y)\mathrm{d}y$ dépend de x. On a donc une fonction $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $A(x) = \displaystyle\int_c^d f_x(y)\mathrm{d}y$.

En intégrant la fonction A sur l'intervalle $[a,b]$, on a la formule : $\int_a^b A(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

Lorsque l'intégrale est écrite $\displaystyle\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ on dit que l'intègre d'abord sur y puis sur x. De manière analogue, $\displaystyle\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$, on dit que l'intègre d'abord sur x puis sur y.

Théorème de Fubini
Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b\,,\ c < d)$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)$ une fonction continue, alors f est intégrable sur R et on a:

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

Le théorème de Fubini indique donc que l'on peut inter-changer l'ordre d'intégration. Un choix judicieux de l'ordre d'intégration permet parfois de simplifier les calculs.

1.4 Rappel des propriétés de l'intégrale

Les propriétés de l'intégrales sont conservées pour les intégrales doubles :

1. **Linéarité**

   Soient f et g deux fonctions intégrables sur un rectangle fermé R alors
   $$\iint_R \big(f(x,y) + g(x,y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_R g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. **Multiplication par un scalaire**

   Soient f une fonction intégrable sur un rectangle fermé R et λ un réel, alors
   $$\iint_R \lambda f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3. **Relation d'ordre**

   Soient f et g deux fonctions intégrables sur un rectangle fermé R telles que $\forall (x,y) \in R, f(x,y) \geq g(x,y)$ alors
   $$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_R g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4. **Relation d'ordre sur les valeurs absolues**

   Si f est une fonction intégrable sur un rectangle fermé R, alors la fonction $|f|$ est intégrable sur R et on a l'inégalité $\iint_R |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \left|\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$

1.5 2 exemples d'intégrales doubles

1.5.1 $f(x,y) = 2x + 2y^2 + xy$

Considérons le rectangle $R = [1,2] \times [0,1]$ avec $(1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1)$ et la fonction f définie sur R par $f(x,y) = 2x + 2y^2 + xy$.

1. Intégrale sur y puis sur x

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left[\int_0^1 2x + 2y + xy\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[2xy + y^2 + \frac{xy^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_1^2 1 + \frac{5x}{2}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 1 + \frac{5x}{2}\mathrm{d}x = \left[x + \frac{5x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{19}{4}
\end{aligned}$$

2. Intégrale sur x puis sur y

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\int_1^2 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\int_1^2 2x + 2y + xy\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[2xy + x^2 + \frac{yx^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}y = \int_0^1 3 + \frac{7y}{2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 3 + \frac{7y}{2}\mathrm{d}x = \left[3y + \frac{7y^2}{4}\right]_0^1 = \frac{19}{4}
\end{aligned}$$

1.5.2 $f(x,y) = ye^{xy}$

Considérons le rectangle $R = [0,1] \times [-1,1]$ avec $(0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1)$ et la fonction f définie sur R par $f(x,y) = ye^{xy}$.

1. Intégrale sur y puis sur x

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\int_{-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 ye^{xy}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \underset{\textbf{IPP}}{=} \int_0^1 \left[\left[y\frac{e^{xy}}{x}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{e^{xy}}{x}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[\left[y\frac{e^{xy}}{x}\right]_{-1}^1 - \left[\frac{e^{xy}}{x^2}\right]_{-1}^1\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{2\mathrm{Ch}(x)}{x} - \frac{2\mathrm{Sh}(x)}{x}\mathrm{d}x \underset{\textbf{IPP}}{=} \left[\frac{2\mathrm{Sh}(x)}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2\mathrm{Sh}(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2\mathrm{Sh}(x)}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \left[2\frac{\mathrm{Sh}(x)}{x}\right]_0^1 = e - \frac{1}{e} - 2 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Sh}(x)}{(x)} = 1
\end{aligned}$$

2. Intégrale sur x puis sur y

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\left[\int_0^1 ye^{xy}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left[e^{xy}\right]_0^1\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} e^y - 1\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^{1} e^y - 1\mathrm{d}y = \left[e^y - y\right]_{-1}^{1} = e - 2 - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Cet example est particulièrement frappant, commencer par intégrer sur x puis y est beaucoup plus facile que l'inverse (double IPP et étude de limite). Pour intégrer une intégrale double, il faudra toujours se poser la question de l'ordre d'intégration.

1.6 Intégrales triples

Les intégrales triples fonctionnent de la même manière que les intégrales doubles. Les mêmes règles s'y appliquent. Elles sont utiles pour calculer des volumes, des centres de masse, des moments d'inertie, etc.

2 Rappel sur les principaux systèmes de coordonnées

Les systèmes de coordonnées, aussi appelés repères, permettent repérer la position d'objets ou de points dans l'espace. Le choix du système de coordonnées est un moment important dans la résolution d'un problème mécanique. En effet, nombreux sont les problèmes où il est utile de repérer la position de points ou d'objets dans l'espace, de calculer des volumes ou des surfaces, ou d'étudier des mouvements au cours du temps. Le choix d'un système de coordonnées approprié permet souvent de simplifier les calculs, alors qu'un choix malencontreux d'un système complexifie très rapidement les équations. Par exemple, décrire la cinématique d'une liaison rotule en coordonnées sphérique est plus simple que dans un repère cartésien. De même une liaison pivot en polaire simplifie les calculs. Les systèmes de coordonnées usuels sont les systèmes cartésien (2D et 3D), polaire (2D), cylindrique (3D) et sphérique (3D).

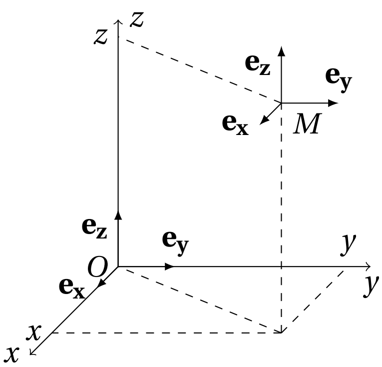
Les vecteurs notés $\mathbf{e_i}$ sont les vecteurs unitaires de norme 1. Ainsi, ils ne portent qu'une direction et un sens.

COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Pour repérer un point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on utilise les vecteurs unitaires $\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$ et $\mathbf{e_z}$, qui forment ainsi une base orthonormée directe. C'est une base globale, les trois vecteurs unitaires pointant toujours dans les mêmes directions quelle que soit la position du point M. On a ainsi

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{e_x} + y\mathbf{e_y} + z\mathbf{e_z} \tag{1}$$

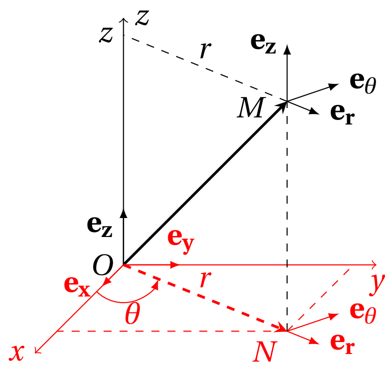
Ce repère est adapté pour décrire des translation (liaison glissière ou appui-plan).



Coordonnées polaires (2D) et cylindriques (3D)

Le système de coordonnées polaires (en rouge) est adapté aux mouvements plans de rotation autour d'un centre O (liaison pivot par exemple). Le point $N(r,\theta)$ est repéré à l'aide d'une base locale définie par les vecteurs unitaires $\mathbf{e_r}$ et $\mathbf{e_\theta}$ telle que

$$\mathbf{ON} = r\mathbf{e_r} = r\cos\theta\mathbf{e_x} + r\sin\theta\mathbf{e_y} \tag{2}$$



Le système de coordonnées cylindrique (extension en noir) est construit par ajout d'un troisième axe au repère polaire, l'axe (Oz). Il est en particulier adapté à la description de mouvements s'inscrivant sur la surface d'un cylindre (liaison pivot glissant par exemple). On repère ainsi la position du point M $(r,\ \theta,\ z)$ en utilisant les vecteurs unitaires $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$ et $\mathbf{e_z}$:

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{e_r} + z\mathbf{e_z} = r\cos\theta\mathbf{e_x} + r\sin\theta\mathbf{e_y} + z\mathbf{e_z} \tag{3}$$

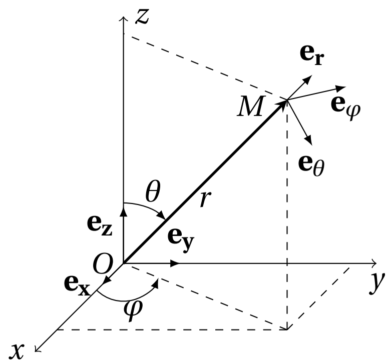
Les vecteurs $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$ et $\mathbf{e_z}$ forment une base locale, leur direction dépendant de la position du point M.

Coordonnées sphériques

Le dernier système de coordonnées habituellement utilisé est le système sphérique. Celui-ci est adapté au repérage de points sur une sphère (liaison rotule). On repère la position du point M par ses coordonnées $(r,\ \theta,\ \varphi)$. On construira au point M une base locale de vecteurs $(\mathbf{e_r},\ \mathbf{e_\theta},\ \mathbf{e_\varphi})$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{OM} &= r\mathbf{e_r}\\ &= r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e_x} + r\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e_y} + r\cos\theta\mathbf{e_z},\end{aligned}$$

$\mathbf{e_r}, \mathbf{e_\theta}$ et $\mathbf{e_\varphi}$ forment une base orthonormée directe.



3 Changements de variable usuels pour intégrales multiples

Comme pour les intégrales simples, les changements de variables peuvent changer la donne lors du calcul d'une intégrale multiple. Souvent, il s'agit de passer d'un système de coordonnées dans un autre (de cartésien en sphérique par exemple).

3.1 Jacobien

Soit $(u(x,y), v(x,y))$ un couple de variables calculées à partir d'un système de coordonnées (x,y). Pour qu'un tel changement de variable soit valable, il faut que u et v soient des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et que chaque couple de valeurs pour (x,y) corresponde à un couple unique de valeurs pour (u,v) et réciproquement : le changement de variable doit être bijectif.

On appelle déterminant Jacobien du changement de variables $(x, y) \to (u, v)$ le déterminant ,

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix}$$

Un petit exemple pour fixer les idées, si on a $\left\{ \begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array} \right.$ alors $J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$
Un autre petit exemple pour passer d'un référentiel cartésien vers un référentiel polaire, si on a $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right.$ alors $J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$

3.2 Changement de variable admissible

Si sur le domaine D, le Jacobien d'un changement de variable ne s'annule jamais (sauf en des points isolés) alors ce changement de variable est bijectif et donc admissible.

Interprétation du Jacobien : Le Jacobien est l'extension à plusieurs dimensions du calcul d'incrément que l'on effectue pour un changement de variable sur une intégrale simple. L'élément de surface infinitésimal décrit par les variables (u,v), $\mathrm{d}S = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ n'a pas la même « taille » que l'élément de surface infinitésimal décrit par les variables (x,y), $\mathrm{d}S* = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Lorsque le changement de variable est admissible, on a la relation $\mathrm{d}u\mathrm{d}v = |J(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Un petit exemple pour fixer les idées, si on a $\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array}$ alors $J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ donc $\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

3.3 Technique du changement de variable pour les intégrales multiples

Comme pour les intégrales simples, il faut suivre 3 étapes :

1. Déterminer le changement de variable à effectuer .

2. Déterminer les bornes du domaine d'intégration (attention, les bornes peuvent devenir des fonctions.)

3. Calculer l'incrément de surface ou de volume à l'aide du jacobien.

3.4 Polaire

Un petit exemple pour fixer les idées. On souhaite calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On donne comme indication d'utiliser les variables polaires (r,θ)

1. Déterminer le changement de variable à effectuer. $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right.$

2. Déterminer les bornes du domaine d'intégration. Ici l'espace à modéliser est le plan $\mathbb{R}^2$, ce qui correspond en polaire à $r \in [0,\infty[$ et $\theta \in [0,2\pi[$.

3. Calculer l'incrément de surface ou de volume à l'aide du jacobien.

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

On peut effectuer le changement de variable,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-(r\cos(\theta))^2-r(\sin(\theta))^2}|J(r,\theta)|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Ensuite, on peut effectuer l'intégration sur θ puis sur r,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_0^{\infty} 2\pi e^{-r^2} r\mathrm{d}r = -2\pi\left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

3.5 Cylindrique

Quasi-identique au polaire. Le terme en z est inchangé.

3.6 Sphérique

Le volume d'une sphère de rayon R est donné par l'intégrale $\iiint_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

1. Déterminer le changement de variable à effectuer. $\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$

2. Déterminer les bornes du domaine d'intégration. L'ensemble d'intégration est la boule de centre O et de rayon R, ce qui correspond en sphérique à $r \in [0,R[$ et $\theta \in [0,\pi[$ et $\varphi \in [0,2\pi[$.

3. Calculer l'incrément de surface ou de volume à l'aide du jacobien.

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = r\sin(\theta)$$

On peut effectuer le changement de variable,

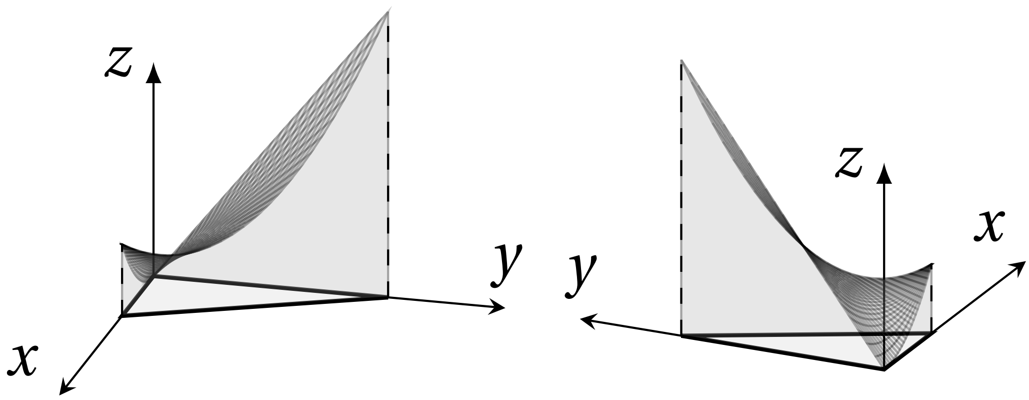
$$\begin{aligned} \iiint_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r \\ &= \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right] = 2\pi\times 2\times\frac{r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

4 Domaine d'intégration non rectangle

Lorsque un domaine n'est pas rectangle, il faut trouver une manière de mapper le domaine. Généralement, cela signifie que les bornes à l'intérieur de l'intégrale vont dépendre des variables.

4.1 Exemple d'un domaine d'intégration triangulaire

Lorsque le domaine d'intégration est non rectangle, on va avoir des bornes d'intégration dépendant des variables. Ici est représenté le cas de l'intégrale de la fonction $f(x,y) = x^2+2y-2xy$ sur le triangle OAB avec $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ et $B(0,2)$.



On souhaite intégrer la fonction $f(x,y)$ sur le domaine triangulaire. Le domaine triangulaire peut être mappé en variant x de 0 à 1 et y de 0 à $2(1-x)$. Attention, lorsque le domaine n'est pas rectangle, le théorème de Fubini ne s'applique pas, on ne peut pas choisir l'ordre d'intégration. L'intégrale s'écrit donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^{2(1-x)} (x^2+2y-2xy)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left[x^2y+y^2-xy^2\right]_0^{2(1-x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(2x^2(1-x)+4(1-x)^3\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{2}-(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}
\end{aligned}$$

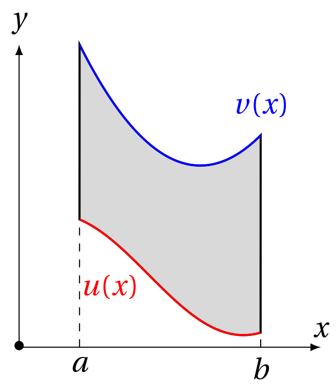
Si on voulait intégrer dans l'autre sens (d'abord sur y puis sur x, on aurait dû mapper en variant y de 0 à 2 et x de 0 à $(1-y)/2$. La même intégrale se serait écrite,

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\int_0^{(1-y/2)} x^2 + 2y - 2xy\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + 2xy - x^2 y \right]_0^{(1-y/2)} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \frac{(2-y)^3}{24} + y(2-y) - \frac{y(2-y)^2}{4} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \frac{(2-y)^3}{24} + 2y - y^2 - y + y^2 - \frac{y^3}{4} \mathrm{d}y \\
&= \left[-\frac{(2-y)^4}{96} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16} \right]_0^2 = \frac{1}{6} + 2 - 1 = \frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

4.2 Intégrales sur un domaine compris entre les graphes deux fonctions et deux droites verticales

Soit $[a,b]$ $(a < b)$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $\forall x \in [a,b]$, $u(x) \leq v(x)$. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b, u(x) < y < v(x)$. Si $f(x,y)$ est une fonction continue, alors f est intégrable sur D et on a

$$
\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
$$



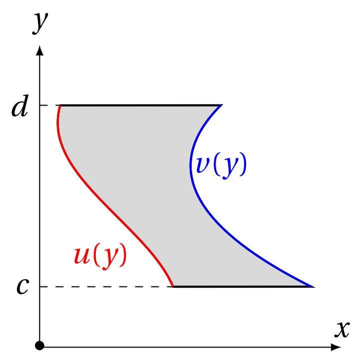
Exemple

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ compris entre les droites verticales d'équation $x = 1$, $x = 4$ et les deux courbes d'équation $u(x) = (x-2)^2 - 4$, $v(x) = -(x-3)^2 + 4$. On considère la fonction $f(x,y) = 3x - 2y + 1$. L'intégrale de f sur D vaut,

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \left(\int_{u(x)}^{v(x)} 3x - 2y + 1\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(\int_{(x-2)^2-4}^{-(x-3)^2+4} 3x - 2y + 1\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left[3xy - y^2 + y \right]_{(x-2)^2-4}^{-(x-3)^2+4} \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left((3x+1)(-x^2 + 6x - 5 - x^2 + 4x) - (-x^2 + 6x - 5)^2 + (x^2 - 4x)^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(-6x^3 + 30x^2 - 15x - 2x^2 + 10x - 5 - (x^4 + 36x^2 + 25 - 12x^3 - 60x + 10x^2) + (x^4 - 8x^3 + 16x^2) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 \left(-2x^3 - 2x^2 + 55x - 30 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^4}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{55}{2}x^2 - 30x \right]_1^4 \\
&= -128 - \frac{128}{3} + 440 - 120 - (-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{55}{2} - 30) = -128 - 42 + 440 - 120 + 3 = 153
\end{aligned}
$$

4.3 Intégrales sur un domaine compris entre les graphes deux fonctions et deux droites horizontales

Les résultats de ce paragraphe sont identiques à de ceux du paragraphe précédent en échangeant les rôles de x et y. On considère un intervalle $[c,d]$ $(c<d)$ fermé borné de $\mathbb{R}$, $u(y)$ et $v(y)$ deux fonctions continues définies sur $[c,d]$ telles que $u(y)<v(y)$.
Soit D le domaine du plan contenu entre les graphes des fonctions $u(y)$, $v(y)$ et les droites horizontales d'équation respective $y=c$ et $y=d$. Soit $f(x,y)$ une fonction continue, alors f est intégrable sur D et on a,



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

4.4 Intégrales doubles sur un domaine D - cas général

Si $D\subset\mathbb{R}^2$ n'est pas un rectangle et ne peut être défini en utilisant les graphes de deux fonctions et deux droites verticales (ou horizontales), on décompose si possible, D en domaines élémentaires du type de ceux déjà traités. Les domaines trop compliqués ne sont pas traitables avec cette technique.

Soit D un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$ composé de deux domaines fermés D_1 et D_2 $(D=D_1\cup D_2)$ et que D_1 et D_2 sont disjoints (hors éventuellement leur bord). Dans ce cas, $f(x,y)$ continue sur D, s'intègre comme

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x$$

5 Formulaire de calcul différentiel/systèmes de coordonnées

5.1 Coordonnées cartésiennes

Longueurs élémentaires

$\mathrm{d}\mathbf{OM}=\mathrm{d}x\mathbf{e}_x+\mathrm{d}y\mathbf{e}_y+\mathrm{d}z\mathbf{e}_z$

Surfaces élémentaires

$\mathrm{d}S_z$=$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}S_x$ =$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; $\mathrm{d}S_y$ =$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

Volume élémentaire

$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

5.2 Coordonnées cylindriques

Longueurs élémentaires

$\mathrm{d}\mathbf{OM} = \mathrm{d}r\,\mathbf{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\mathbf{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\mathbf{e}_z$

Surfaces élémentaires

$\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta$; $\mathrm{d}S_r = r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$; $\mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$

Volume élémentaire

$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

5.3 Coordonnées sphériques

Longueurs élémentaires

$\mathrm{d}\mathbf{OM} = \mathrm{d}r\,\mathbf{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$

Surfaces élémentaires

$\mathrm{d}S_r = r\mathrm{d}\theta\,r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$; $\mathrm{d}S_\theta = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$; $\mathrm{d}S_\varphi = r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$

Volume élémentaire

$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta\,r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$