Séance 2 Abscisse Curviligne

1 De la courbe paramétrée à l'abscisse curviligne

Un des soucis des courbes paramétrées est la non-unicité du paramétrage. Par exemple, un cercle de rayon 1 centré en 0 peut être représenté par le paramétrage $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ ou bien par le paramétrage $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2}) \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$

L'idée est de transformer la variable t qui n'a aucun sens géométrique particulier en une nouvelle variable s appelée abscisse curviligne qui elle possède une interprétation géométrique simple. En plus, elle simplifiera considérablement certain calcul (notamment celui de la base de Frenet).

1.1 Définition de l'abscisse curviligne

Rappel : La longueur d'une courbe paramétrée s'écrit,

$$L = \int_a^b ||\mathbf{f}'(t)||\,\mathrm{d}t$$

L'abscisse curviligne correspond au paramétrage d'une courbe par sa longueur. En termes mathématiques,

Soit $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une courbe paramétrée continue, dérivable et à dérivées continues. L'abscisse curviligne est l'application $s : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 = \|f'\|^2$$

Si l'on intègre cette expression, l'abscisse curviligne correspond à la longueur de la courbe,

$$\left(s'^2 = x'^2 + y'^2\right) \Longleftrightarrow \left(\forall\, t_0 \in I \quad s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t\right)$$

Stricto sensu, l'abscisse curviligne n'est pas unique mais est définie à une constante près.

1.2 Un changement de paramétrage vers un paramétrage normal

L'abscisse curviligne est un paramétrage de la courbe dit normal (dans le sens de normé). Si l'on change de variable en composant par la fonction réciproque de l'abscisse curviligne,

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f} \circ s^{-1}(t) = \begin{pmatrix} x(s^{-1}(t)) \\ y(s^{-1}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(s)$$

D'un point de vue cinématique, le parcours de la courbe $\mathbf{g}(t)$ a lieu à vitesse constante unitaire,

$$\|(f \circ s^{-1})'\| = \|f'(s^{-1}) \times (s^{-1})'(t)\| = \|f'(s^{-1}) \times \frac{1}{s'(s^{-1})}\| = \|f'(s^{-1}) \times \frac{1}{\|f'(s^{-1})\|}\| = 1$$

On peut schématiser le changement de variable,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{s^{-1}} & I & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbb{R}^2 \\ s & \rightarrow & t & \rightarrow & \mathbf{f}(t) \end{array}$$

1.3 Utilisation de l'abscisse curviligne (paramétrage cartésien ou polaire)

Fixons dans toute cette partie une courbe paramétrée $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^2$. La vecteur tangent (ou vecteur vitesse) T s'ecripe toujours comme la dérivée de la courbe paramétrée, $\mathbf{T} = \mathbf{f}'(s)$. C'est un vecteur de norme 1 mais sa direction peut changer.

On peut calculer en fonction des coordonnées cartésiennes et polaires $t \longmapsto \big(x(t), y(t)\big)$, $\theta \longmapsto \rho(\theta)\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos(\theta) \\ \rho(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}$ l'expression d'une abscisse curviligne,

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \\ s(\theta) &= \sqrt{(-\rho(\theta)\sin(\theta) + \rho'(\theta)\cos(\theta))^2 + (\rho(\theta)\cos(\theta) + \rho'(\theta)\sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} \end{aligned}$$

1.4 Un petit exemple : la Cardioïde

Équation paramétrique de la cardioïde en coordonnées polaires :
$\rho(\theta) = a(1+\cos(\theta))$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ qui correspond à $\mathbf{f}(\theta) = \rho(\theta)\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+\cos(\theta))\cos(\theta) \\ a(1+\cos(\theta))\sin(\theta) \end{pmatrix}$

A partir de la définition de l'abscisse curviligne en

$$s'(\theta) = a\sqrt{2(1+\cos(\theta))}$$

Sa longueur se calcule en utilisant la formule de l'angle moitié :

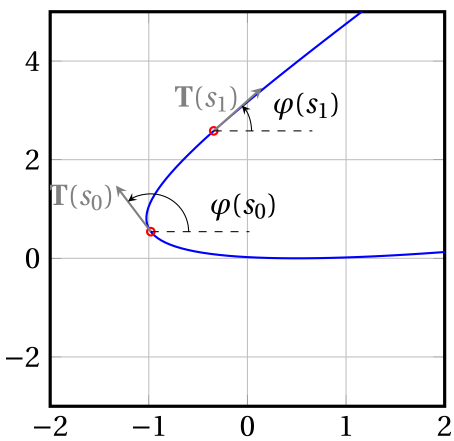
$$
\begin{aligned}
L_{cardioïde} &= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta \\
&= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2(\theta/2)}\mathrm{d}\theta \\
&= 2a\int_0^{2\pi}|\cos(\theta/2)|\mathrm{d}\theta \\
&= 4a\int_0^{\pi}|\cos(u)|\mathrm{d}u \\
&= 4a\left(\int_0^{\pi/2}\cos(u)\mathrm{d}u-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(u)\mathrm{d}u\right) \\
&= 4a\left(\left[\sin(u)\right]_0^{\pi/2}-\left[\sin(u)\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) \\
&= 8a
\end{aligned}
$$

1.5 Paramétrisation complète d'une courbe par l'abscisse curviligne et l'angle

Dans la suite on notera t le paramètre d'une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ et s une abscisse curviligne. Quand on écrira $f(s)$ cela signifiera que la paramétrisation choisie est celle par l'abscisse curviligne. De-même pour $f(t)$.

Paramétrisation angulaire du vecteur tangent T :

Avec une paramétrisation par abscisse curviligne, la norme du vecteur tangent est $\|\mathbf{T}\| = 1$. On peut définir un angle variant avec l'abscisse curviligne $\varphi(s)$ et définissant le vecteur tangent $T(s) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi(s))\\ \sin(\varphi(s))\end{pmatrix}$.



À partir d'un point de départ et de la fonction $\varphi(s)$, on peut construire la courbe paramétrée de proche en proche. On est passé d'une description cartésienne à une description métrique. L'avantage est de réduire au minimum la description de la courbe : 1 seule fonction est nécessaire pour une courbe plane avec la description par abscisse curviligne alors que 2 sont nécessaires pour la description cartésienne.

2 Retour sur la notion de courbure

2.1 Courbure d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne

On calcule le vecteur accélération,

$$\mathbf{T}'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} = \varphi'(s)\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

Si l'on reprend la formule de la courbure d'une courbe paramétrée et que l'on l'applique au paramétrage curviligne,

$$C(s) = \frac{\det\big(\mathbf{T}(s), \mathbf{T}'(s)\big)}{\|\mathbf{T}(s)\|^3} = \varphi'(s)\begin{vmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{vmatrix} = \varphi'(s)$$

Avec ce paramétrage, la courbure s'exprime très simplement, c'est le taux de variation de l'angle du vecteur vitesse. A noter, le vecteur vitesse et le vecteur accélération sont toujours orthogonaux avec le paramétrage curviligne.

Si on suppose que la courbure est identiquement nulle, alors le vecteur tangent est constant et l'arc est en fait une droite. Le rayon de courbure est l'inverse de la courbure,

$$R = \frac{1}{C}$$

.

2.2 Expressions de la courbure en cartésien et en polaire

2.2.1 Courbure en paramétrage cartésien

On peut calculer la courbure d'une courbe paramétrée en cartésien, $\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$ et $\mathbf{T}'(t) = \begin{pmatrix}x''(t)\\ y''(t)\end{pmatrix}$,

$$C(t) = \frac{\det\big(\mathbf{T}(t), \mathbf{T}'(t)\big)}{\|\mathbf{T}(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Au passage cette expression permet de retrouver celle de la courbure d'une fonction classique (en prenant $x' = 1$ et $x'' = 0$),

$$C(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}$$

.

2.2.2 Courbure en paramétrage polaire

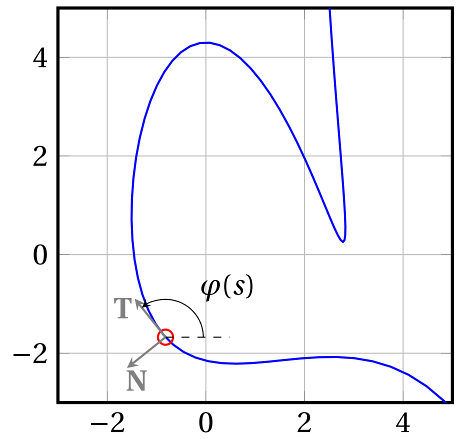
On peut calculer la courbure d'une courbe paramétrée en polaire, $\mathbf{T}(\theta) = \rho'(\theta)\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} + \rho(\theta)\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$ et $\mathbf{T}'(\theta) = \big(\rho''(\theta) - \rho(\theta)\big)\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} + 2\rho'(\theta)\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$,

$$C(\theta) = \frac{\det\big(\mathbf{T}(\theta), \mathbf{T}'(\theta)\big)}{\|\mathbf{T}(\theta)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix}\rho'\cos(\theta) - \rho\sin(\theta) & (\rho'' - \rho)\cos(\theta) - 2\rho'\sin(\theta)\\ \rho'\sin(\theta) + \rho\cos(\theta) & (\rho'' - \rho)\sin(\theta) + 2\rho'\cos(\theta)\end{vmatrix}}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

3 Repère de Frenet

Le repère de Frenet est très pratique pour analyser des cinématiques sur des courbes. On associe à un point s un repère local $(M(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s))$ appelé repère de Frenet où $\mathbf{T}(s)$ est le vecteur tangent en s et $\mathbf{N}(s)$ le vecteur normal.
Ces vecteurs sont liés par les formules de Frenet :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}\mathbf{N}/\mathrm{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

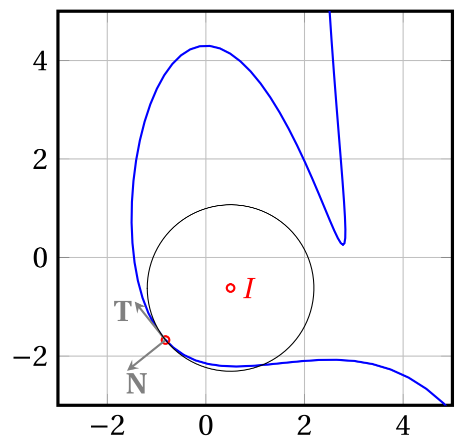


3.1 Cercle osculateur

Il existe un cercle particulier, associé à un arc $\mathscr{C}^2$: le cercle osculateur. Intuitivement, c'est celui qui épouse la forme de la courbe. Il se définit mathématiquement de la façon suivante :
On appelle I le centre de courbure en un point s défini par :

$$\overrightarrow{M(s)I(s)} = \frac{1}{C}\overrightarrow{N(s)}$$

Le cercle osculateur est alors celui centré en I et de rayon $|R| = |1/C|$. En mécanique le point I est appelé centre instantané de rotation.

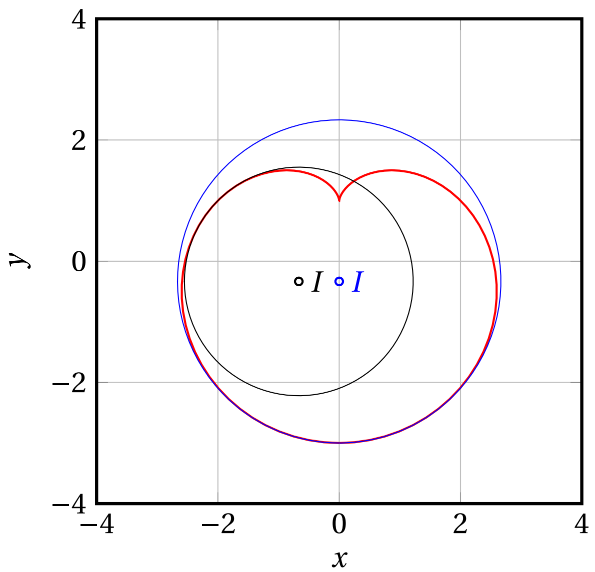


3.2 Exemples

3.2.1 Cardioïde

Cardioïde :

$$\begin{cases} x = a\cos(t)(1+\cos(t)) \\ y = a\sin(t)(1+\cos(t)) \end{cases}$$



Conclusion : La courbure détermine une courbe à déplacement près.

4 Courbes gauches (3D)

4.1 Extension des notions définies dans $\mathbb{R}^2$.

Les notions suivantes, présentées en 2D, sont extensibles en 3D : trajectoire, régularité, birégularité, abscisse curviligne, vecteur tangent unitaire (en terme de dérivées). L'abscisse curviligne d'une courbe paramétrée 3D devient

$$t \in I \longmapsto \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Longrightarrow s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

4.2 Propriétés métriques, repère de Frenet–Serret

En 3D, on ne dispose plus de la paramétrisation du vecteur tangent unitaire par l'angle. Pour caractériser les courbes à un déplacement près à l'aide de diverses grandeurs (courbure dans le cas de $\mathbb{R}^2$), nous utiliserons courbure et torsion dans $\mathbb{R}^3$.
La courbure dans $\mathbb{R}^3$ est différente de celle de $\mathbb{R}^2$. Rappelons les formules de Frenet dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} \\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

En particulier, nous avons : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \gamma N$. Comme N est de norme 1 :

$$\gamma = \left\| \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} \right\|$$

C'est cette définition que nous allons utiliser dans $\mathbb{R}^3$. Notons que $\mathbb{R}^2$ possède une orientation naturelle, alors que $\mathbb{R}^3$ non. Ainsi, la courbure dans $\mathbb{R}^2$ est une grandeur algébrique. Dans $\mathbb{R}^3$, elle est tout le temps positive.

On appelle courbure C, le réel $C = \left\| \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} \right\|$ avec le rayon de courbure $R = \frac{1}{\gamma}$.

4.3 Repère de Frenet-Serret

On appelle vecteur binormal noté B le vecteur défini par : $B = T \wedge N$. C'est par définition du produit vectoriel le vecteur directement orthonormal à B et N. Alors le repère local (T, N, B) forme un trièdre direct appelé repère de Frenet-Serret.

Le vecteur binormal B est également de norme 1 puisque T et N le sont.

Dans $\mathbb{R}^3$, une courbe peut se "déformer" selon deux directions. Dans le plan cette "déformation" était entièrement déterminée par la courbure. Dans $\mathbb{R}^3$, il faut rajouter une nouvelle grandeur appelée torsion.

On appelle torsion notée τ le scalaire défini par :

$$\tau = \langle B, \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} \rangle$$

C'est une grandeur algébrique.

[Formules de Frenet-Serret] On obtient de nouvelles formules de Frenet, où τ est une nouvelle grandeur appelée torsion, à laquelle on associe $R_T = \frac{1}{\tau}$ le rayon de torsion.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}T/\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}N/\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}B/\mathrm{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

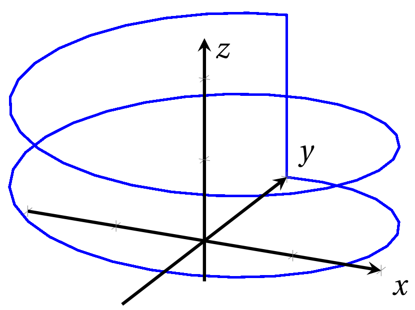
Comment définir l'analogue du cercle osculateur pour $\mathbb{R}^2$? On peut définir différents types de plans en un point. Le plan normal (orienté selon N et orthogonal à T), le plan tangent (orienté selon T et orthogonal à N), ou bien le plan osculateur, qui est celui ayant un "point de contact " maximal avec la courbe :

On appelle plan osculateur en $M(s)$ le plan passant par M et dirigé par $f'(s)$ et $f''(s)$.

4.4 Exemple : cas de l'hélice à pas constant

L'hélice peut être caractérisée comme une courbe dont il existe un vecteur, tel que l'angle entre ce vecteur et le vecteur tangent reste constant en n'importe quel point de la courbe... (justification infra). Mais on peut donner une représentation paramétrique, soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases} x(t) = & r\cos t \\ y(t) = & r\sin t \\ z(t) = & ht \end{cases}$$



Remarquons déjà que la caractérisation précédente est vérifiée. Le vecteur en question est $\vec{k}$ (vecteur directeur de l'axe cote). Pour montrer que l'angle entre T et $\vec{k}$ est constant, il suffit de calculer la quantité $\frac{\langle \vec{k}, T\rangle}{\|\vec{k}\|.\|T\|}$. Le numérateur est la troisième composante de T, c'est $\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$. Le dénominateur est la norme de T, soit 1, donc le quotient est constant !
Calculons rayon de courbure et rayon de torsion, le vecteur tangent unitaire est (en un point t) :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}(-r\sin(t), r\cos(t), h)$$

De plus, par la formule de dérivée d'une composée, on a (T désigne le vecteur tangent unitaire ci-dessus) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= \frac{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} \\ &= \left(r^2+h^2\right)^{-1}(-r\cos(t), -r\sin(t), 0)\end{aligned}$$

De plus, $N = \frac{1}{r}(-r\cos(t), -r\sin(t), 0)$, donc $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = r\left(r^2+h^2\right)^{-1} N$. Le rayon de courbure est donc :

$$R = \frac{r^2+h^2}{r}$$

On fait de-même pour le rayon de torsion R_T. On calcule le vecteur binormal :

$$B = T\wedge N = -\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}(-h\sin t, h\cos t, -r)$$

De plus, $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}(\sin t, -\cos t, 0)$. Calculons $\langle \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}, B\rangle = \frac{h}{r^2+h^2}$. Cette quantité est précisément la torsion d'après les formules de Frenet. Donc le rayon de torsion est :

$$R_T = \frac{r^2+h^2}{h}$$