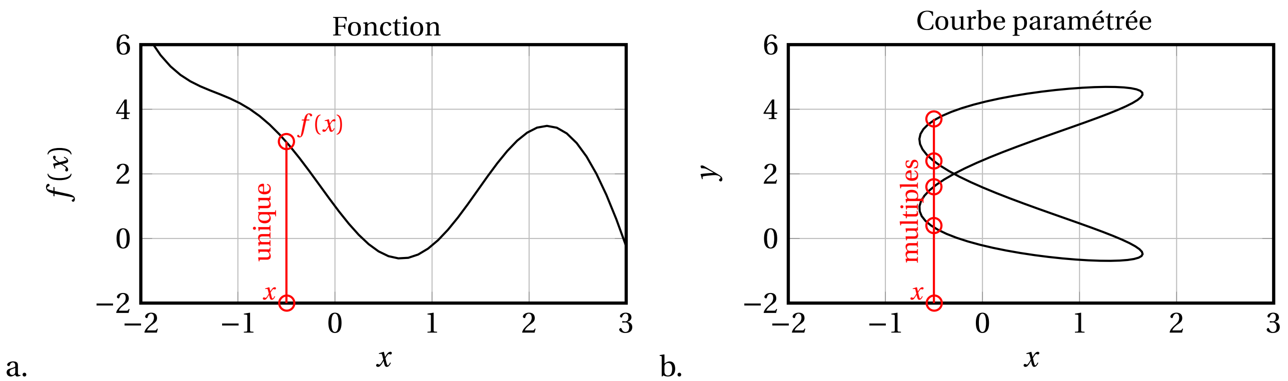
Séance 1 Courbes paramétrées

1 Limitation graphique d'une fonction

Une fonction a un caractère injectif : à tout élément de l'ensemble de départ elle admet un unique élément de l'ensemble d'arrivée. Autrement dit à tout x de l'ensemble de départ correspond un unique $f(x)$ de l'ensemble d'arrivée.

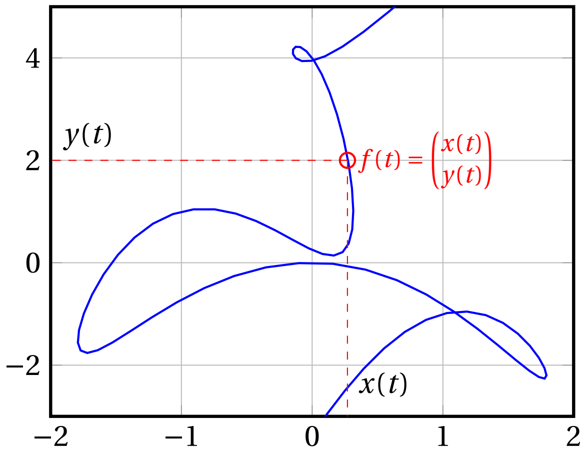


De cette manière une fonction ne peut pas représenter une droite verticale, un cercle ou une ellipse : au moins 2 points ont la même abscisse mais des ordonnées différentes. Pour représenter ces éléments on fera appel au formalisme des courbes paramétrées. Les courbes paramétrées permettent de représenter des formes géométriques complexes.

2 Définition d'une courbe paramétrée plane

Une courbe paramétrée plane est une application $f(t)$ d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$$



Ainsi, une courbe paramétrée (ou arc paramétré) est une application qui, à un réel t (le paramètre), associe un point du plan $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
Un paramétrage n'est pas unique. Une courbe peut être représentée par plusieurs paramétrages du plan.

Interprétation cinématique : En mécanique, l'étude des mouvements s'appelle la cinématique. Lorsque le paramètre t s'interprète comme le temps, la courbe paramétrée est une trajectoire. Dans ce cas, on peut dire que $\mathbf{f}(t)$ est la position du point à l'instant t.

2.1 Intérêt en mécanique

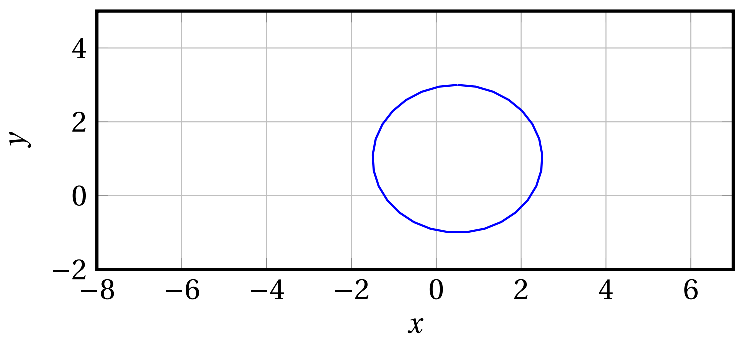
Les courbes paramétrées ont plusieurs intérêts majeurs en génie mécanique,

1. Modéliser la cinématique de mouvements complexes (par exemple, le mouvement d'un point sur un pneu qui roule et qui avance).
2. Définir les trajectoires outils pour les machines à commande numérique.
3. Calculer les vitesses et les accélérations des trajectoires (Machines outils : corriger les erreurs inertielles, modélisation cinématique).
4. Permettre la modélisation de géométries complexes par modeleur géométrique (CATIA, 3DExperience, etc.)

2.2 Exemples de courbes paramétrées

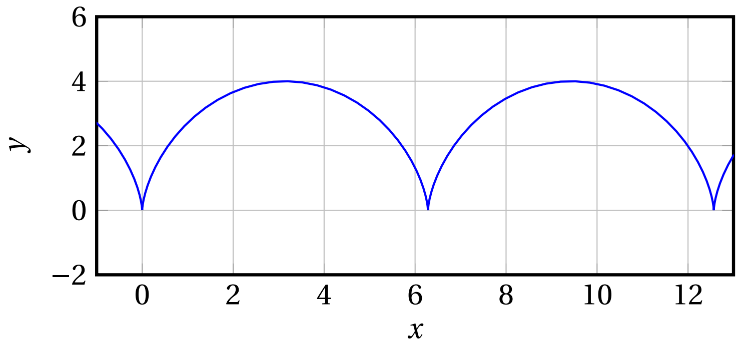
Cercle :

$$\begin{cases} x = R(\cos(t)) \\ y = R(\sin(t)) \end{cases}$$



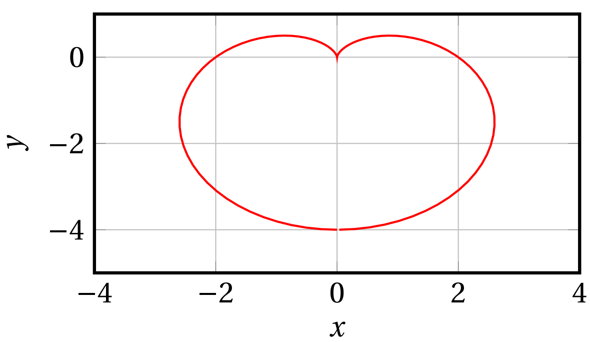
Cycloïde :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin(t)) \\ y = R(1 - \cos(t)) \end{cases}$$



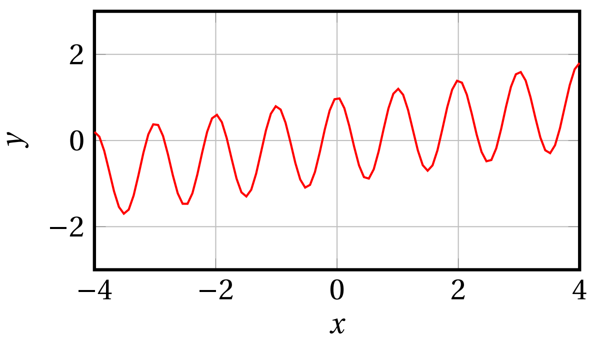
Cardioïde :

$$\begin{cases} x = R\cos(t)(1 + \cos(t)) \\ y = R\sin(t)(1 + \cos(t)) \end{cases}$$



Une fonction classique :

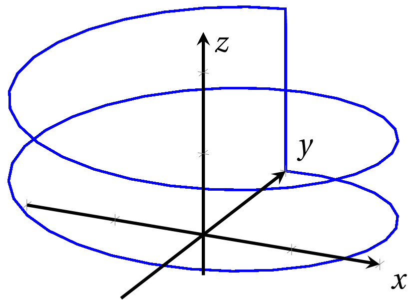
$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$



Toute fonction classique peut être représentée par une courbe paramétrée.

3 Définition d'une courbe paramétrée 3D

Une courbe paramétrée plane est une application $f(t)$ d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$:



$$\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longrightarrow & \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, une courbe paramétrée (ou arc paramétré) est une application qui, à un réel t (le paramètre), associe un point de l'espace $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Comme pour les courbes planes, un paramétrage n'est pas unique. Une courbe peut être représentée par plusieurs paramétrages différents.

4 Vecteur tangent, vecteur vitesse

4.1 définition

Soit $\mathbf{f}(t)$ une courbe paramétrée ; le vecteur tangent (appelé vecteur vitesse en mécanique) en $t = t_0$ est la limite (si elle existe)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h} = \mathbf{f}'(t_0)$$

Ces expressions s'appliquent pour des courbes paramétrées à 2 dimensions ou a 3 dimensions:

$$\text{en 2D :} \quad \mathbf{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \text{en 3D :} \quad \mathbf{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}$$

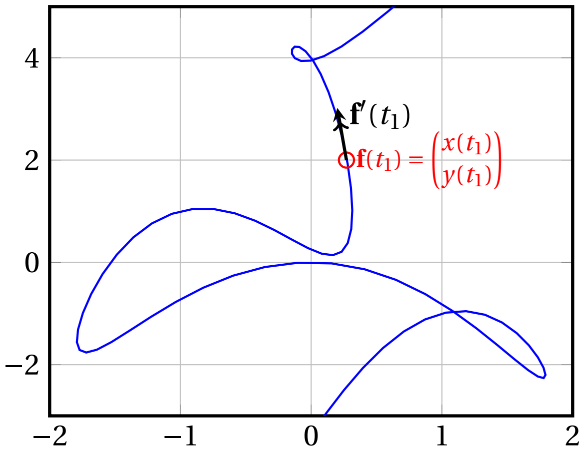
Ainsi le vecteur tangent ne peut exister que si les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont dérivables en t_0. En mécanique, la dérivation temporelle est notée de manière équivalente $\mathbf{f}'(t) \equiv \dot{\mathbf{f}}(t)$

4.2 Représentation graphique

Le vecteur tangent à la courbe paramétrée permet de définir l'équation de la droite tangente au point t_0 telle que

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{f}'(t_0)$$

Lorsque $t = t_0$, la droite tangente est bien situé sur la courbe paramétrée $\mathbf{T}(t_0) = \mathbf{f}(t_0)$.



4.3 Équation de droite de la tangente

En 2D l'équation de droite se détermine facilement à partir de l'équation paramétrée de la tangente.

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{f}'(t_0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t - t_0)\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$

Si $x'(t_0) \neq 0$,

$$\begin{cases} x = x(t_0) + (t - t_0)x'(t_0) \\ y = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = (t - t_0) \\ y = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = (t - t_0) \\ y = y(t_0) + (x - x(t_0))\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \end{cases}$$

L'équation de droite de la tangente $\mathbf{T}$ est donc $y = y(t_0) + (x - x(t_0))\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$
Si $x'(t_0) = 0$, l'équation de droite est simplement $x = x(t_0)$, droite verticale.

5 Étude d'une courbe paramétrée

Les courbes paramétrées sont plus difficiles à tracer que les fonctions mais on peut en donner une représentation rapide via une étude de courbe paramétrée. Là où une étude de fonction se résume à un tableau de variation, l'étude de la courbe paramétrée correspond aux tableaux de variation de chaque fonction coordonnée.

5.1 Réduction du domaine d'étude

Pour se simplifier la tâche, la première chose à faire est de voir si la courbe possède des propriétés de symétrie. On peut chercher si un point M (x,y) de la courbe reste sur la courbe après l'application des transformations suivantes :

1. Translation de vecteur $\mathbf{u} = (a, b)$: $t_{\mathbf{u}}(M) = (x + a, y + b)$.

2. Réflexion d'axe (Ox) : $s_{(Ox)}(M) = (x, -y)$.

3. Réflexion d'axe (Oy) : $s_{(Oy)}(M) = (-x, y)$.

4. Symétrie centrale de centre O : $s_O(M) = (-x, -y)$.

5. Symétrie centrale de centre $I(a, b)$: $s_I(M) = (2a - x, 2b - y)$.

6. Réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$: $s_D(M) = (y, x)$.

7. Rotation d'angle $\pi/2$ autour de O : $Rot_{O,\pi/2)}(M) = (-y, x)$.

8. Rotation d'angle $-\pi/2$ autour de O : $Rot_{O,-\pi/2)}(M) = (y, -x)$.

5.2 Tangentes horizontales et tangentes verticales (2D)

Les tangentes horizontales correspondent aux points où la dérivée de la coordonnée $y(t)$ s'annule, $y'(t) = 0$.

Les tangentes verticales correspondent aux points où la dérivée de la coordonnée $x(t)$ s'annule, $x'(t) = 0$.

5.3 Asymptotes (2D)

Soit une courbe paramétrée $\mathbf{f}$ définie sur un intervalle ouvert ou semi ouvert $I \in \mathbb{R}$. t_0 désigne une des bornes de I (t_0 est soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$).

On dit qu'il y a branche infinie en t_0 dès que l'une au moins des deux fonctions $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers t_0 : $\lim\limits_{t \to t_0} ||\mathbf{f}(t)|| = +\infty$.

Une asymptote, si elle existe, est la droite qui approxime une branche infinie. La droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à la courbe représentative de la courbe paramétrée $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - \big(ax(t) + b\big) = 0$

Classification des asymptotes

1. Asymptote horizontale : Si, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a \in \mathbb{R}$

   La droite d'équation $y = a$ est asymptote horizontale à la courbe paramétrée.

2. Asymptote verticale : Si, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a \in \mathbb{R}$

   La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe paramétrée.

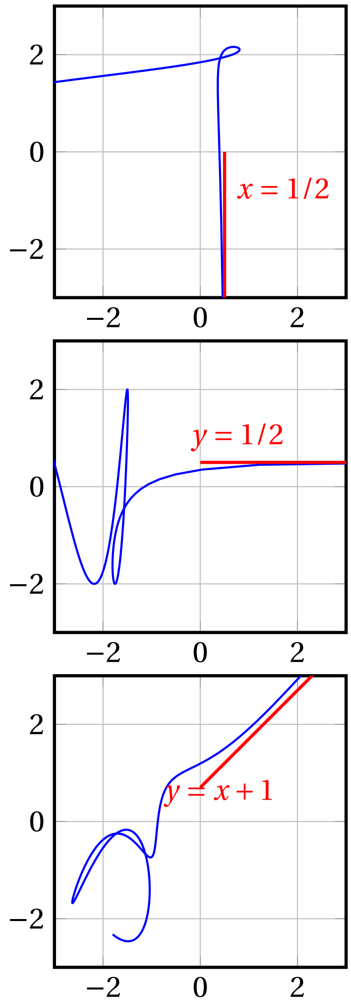
3. Asymptote oblique (cas à rechercher si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$)

   (a) étape 1 : $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

   (b) étape 2 : $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$

   La droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe paramétrée.

4. Branche infinie sans asymptote : si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ ou 0



5.4 Points multiples

Les courbes paramétrées peuvent se recouper.Lorsqu'elles se recoupent, le point d'intersection a une multiplicité d'au moins 2, c'est-à-dire que le nombre de fois où la courbe est passée par le point est d'au moins 2. Plus généralement, soit $\mathbf{f}(t)$ une courbe paramétrée et soit $\mathbf{A}$ un point du plan. La multiplicité du point $\mathbf{A}$ par rapport à la courbe $\mathbf{f}$ est le nombre de réels t pour lesquels $\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}$.

5.5 Points singuliers

Soit $\mathbf{f}$ une courbe paramétrée. Si le vecteur dérivé est nul, si $\mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (ou bien en 3D, $\mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ alors le point $\mathbf{f}(t)$ est un point singulier.

Lorsque le vecteur dérivé est nul, il n'est d'aucune utilité pour la recherche de la tangente. Pour trouver la tangente en un point singulier, il faut repartir de la définition

Soit un point $\mathbf{f}(t)$ singulier, on recherche la limite, $\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{x(t+h)-x(t)}$. Si cette limite est un réel alors la tangente existe et a pour coefficient directeur ce coefficient. Si cette limite est infinie, la tangente est verticale.

5.6 Typologie des points singuliers

Quand la courbe arrive au point singulier, la vitesse s'arrête.

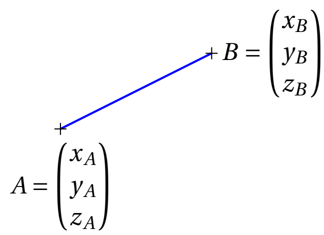
1. la courbe continue dans le même sens, sans traverser la tangente : point ordinaire,
2. la courbe continue dans le même sens, en traversant la tangente : point d'inflexion,
3. la courbe rebrousse chemin : c'est un point de rebroussement.

6 Longueur d'une courbe paramétrée

6.1 Longueur de lignes brisées

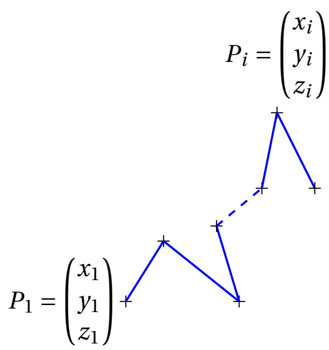
On considère une ligne brisée constituée d'un segment $[A,B]$ avec $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ dans ce cas, la longueur est simplement la norme euclidienne du vecteur $A\,B$,

$$L([A,B]) = ||A\,B|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)}.$$



Pour une ligne brisée constituée de plusieurs segment, la longueur est simplement la somme de chaque segment. Soit une ligne brisée constituée des points $[P_1, \ldots P_n]$ définis tels que $P_i = (x_i, y_i, z_i)$. La longueur de cette ligne brisée s'écrit,

$$\begin{aligned} L &= L([P1,P2]) + L([P2,P3]) + \cdots + L([P_{n-1},P_n]) = \sum_{i=1}^{n-1} L([P_i, P_{i+1}]) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (y_{i+1}-y_i)^2 + (z_{i+1}-z_i)^2} \end{aligned}$$



6.2 Longueur d'une courbe paramétrée

Soit une courbe paramétrée $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ définie sur un intervalle [a,b] dont les fonctions coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont continues et dérivables. On peut découper l'intervalle [a,b] en subdivision plus petites et approximer la courbe paramétrée par des segments (approximation linéaire) dans cette subdivision. On peut ainsi calculer la longueur,

$$L \simeq L([\mathbf{f}(t_1), \mathbf{f}(t_2)]) + L([\mathbf{f}(t_2), \mathbf{f}(t_3)]) + \cdots + L([\mathbf{f}(t_{n-1}), \mathbf{f}(t_n)]) \quad \text{avec} \quad t_1 = a < t_2 < \ldots t_{n-1} < t_n = b$$

En augmentant le nombre de subdivision, $n \to \infty$, on peut approximer la fonction par avec dérivée sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $\mathbf{f}(t_{i+}) \simeq \mathbf{f}(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\mathbf{f}'(t_i)$. On calcule ainsi la longueur de la courbe sur l'intervalle infinitésimal,

$$L_i \simeq ||\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i+1})|| = \sqrt{\left(\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i+1})\right)^2} = \sqrt{\left((t_{i+1} - t_i)\mathbf{f}'(t_i)\right)^2} = ||\mathbf{f}'(t_i)||(t_{i+1} - t_i)$$

En notant $ti + 1 - ti = \mathrm{d}t$ et en passant d'une somme discrète à une somme continue (intégrale), on obtient l'expression de la longueur d'une courbe paramétrée,

$$L = \int_a^b ||\mathbf{f}'(t)||\,\mathrm{d}t$$

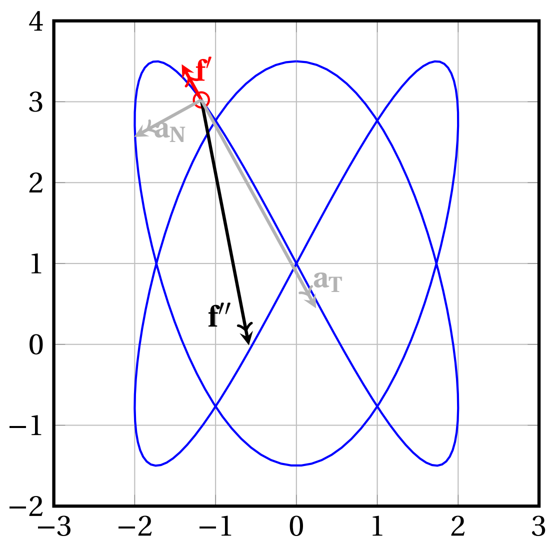
7 Vecteur accélération

Soit $\mathbf{f}(t)$ une courbe paramétrée ; le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse et est noté $\mathbf{f}''(t)$ ou $\ddot{\mathbf{f}}(t)$. Le vecteur accélération en $t = t_0$ est la limite (si elle existe)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}'(t_0 + h) - \mathbf{f}'(t_0)}{h} = \mathbf{f}''(t_0)$$

Ces expressions s'appliquent pour des courbes paramétrées à 2 dimensions ou a 3 dimensions:

$$\text{en 2D :} \quad \mathbf{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} x''(t_0) \\ y''(t_0) \end{pmatrix} \text{en 3D :} \quad \mathbf{f}''(t_0) = \begin{pmatrix} x''(t_0) \\ y''(t_0) \\ z''(t_0) \end{pmatrix}$$



On sépare généralement l'accélération tangentielle $\mathbf{a}_T$ (augmentation en norme du vecteur vitesse) de l'accélération radiale $\mathbf{a}_N$ (changement de direction du vecteur vitesse),

$$\mathbf{a}_T = \frac{\mathbf{f}''.\mathbf{f}'}{||\mathbf{f}'||^2}\mathbf{f}' \qquad \textbf{et} \qquad \mathbf{a}_N = \mathbf{f}'' - \frac{\mathbf{f}''.\mathbf{f}'}{||\mathbf{f}'||^2}\mathbf{f}'$$

8 Courbure d'une courbe paramétrée

En 2D, la courbure d'une courbe paramétrée s'obtient à partir des vecteurs vitesse et accélération,

$$C(t) = \frac{\det\left(\mathbf{f}'(t), \mathbf{f}''(t)\right)}{||\mathbf{f}'(t)||^3} = \frac{||\mathbf{a_N}||}{||\mathbf{f}'(t)||^2}$$

On peut retrouver ce résultat en considérant le repère de Frenet: l'accélération tangentielle correspond à un changement de la norme du vecteur vitesse. L'accélération normale quant à elle correspond au changement de direction du vecteur vitesse. Ce changement de direction du vecteur vitesse est directement lié à la courbure : l'accélération normale vaut la vitesse au carré divisée par le rayon de courbure

$$\mathbf{a}_N = \frac{||\mathbf{f}'(t)||^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad C(t) = \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{a_N}}{||\mathbf{f}'(t)||^2}$$