Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Séance 4 Transformées de Fourier 2

1 Transformées de Fourier d'exponentielles

Cet exercice est consacré au calcul de la transformée de Fourier de :

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}$$

, $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, ainsi qu'à ses propriétés, notamment en terme de largeur à mi-hauteur.

1. Calculer $\tilde{x}(\omega)$ la transformée de Fourier de $x(t)$.
2. Vérifier les propriétés de symétrie de $\tilde{x}$ (parité). Vérifiez également que : $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\omega)d\omega$ et $\tilde{x}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ et calculer ces quantités.

2 Transformées de Fourier de Gaussiennes

Dans cet exercice on détermine la transformée de Fourier de la gaussienne : $g_{\tau,\sigma}(t) = e^{-\pi((t-\tau)/\sigma)^2}$, $t \in \mathbb{R}$, paramétrée par $\tau \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^{*+}$. On admettra le résultat suivant : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = 1$ (Résultat montré lors du cours de Maths du premier semestre).

1. Dans un premier temps on s'intéresse à la gaussienne centrée réduite $g = g_{01} = e^{-\pi t^2}$. Montrer simplement que sa transformée de Fourier s'écrit :

   $$\tilde{g}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cos(\omega t)\mathrm{d}t$$

   .
2. En dérivant sous le signe intégrale par rapport à la pulsation ω puis en intégrant par partie, déterminer une équation différentielle simple en $\tilde{g}(\omega)$.
3. Résoudre l'équation différentielle.
4. Déterminer les constantes d'intégration en utilisant le résultat admis.
5. En faisant un changement de variable, déterminer la transformée de Fourier $\tilde{g}_{\tau,\sigma}$.

3 Un exercice plus théorique

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} \mathrm{d}t$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

1. Dériver $f(x)$
2. Intégrer $f'(x)$ par parties pour déterminer une équation différentielle liant f et f'.
3. Résoudre l'équation différentielle
4. Trouver la constante grâce au résultat admis.

4 Résolution d'équation différentielles par transformées de Fourier

4.1 Oscillateur harmonique

Soit un oscillateur harmonique dont l'équation du mouvement est $f''(t) + \Omega^2 f(t) = 0$.

1. En faisant une intégration par partie, donner la transformée de Fourier de $f'(t)$ en fonction de la transformée de Fourier de f.
2. En déduire la transformée de Fourier de la dérivée seconde.
3. Déterminer la transformée de Fourier de cette équation différentielle.
4. En déduire la transformée de Fourier de f.
5. Calculer la transformée de Fourier inverse pour en déduire $f(t)$.