Institut Universitaire de Technologie
Aix Marseille Université

Séance 2 Développements limités 2

1 Les Fanas de Base Jump

Deux fanas de base jump souhaitent sauter dans les gorges du Verdon. Ils savent que depuis leur lieu de saut, les gorges sont profondes de 250m. Ils veulent déterminer après combien de temps de chute libre ils doivent défaire leur parachute.

1. Ils font un test en soufflerie en choisissant un objet sphérique pour les représenter : une sphère en plomb de rayon $r = 1{,}00$ cm et de masse volumique $\rho = 11{,}34$ g.cm^{-3} est suspendue à un point du plafond par un fil et se trouve placée dans une soufflerie. La vitesse du vent, horizontale, a pour valeur $v_0 = 10{,}0$ m.s^{-1} et le fil fait alors un angle $\alpha = 1{,}6\,10^{-4}$ rad avec la verticale. Sachant que la résistance de l'air est de la forme $f = k\pi r^2 v_0^2$, déterminez le coefficient k et précisez son unité dans le système international.

2. Les amateurs de base jump (masse m= 80kg, principalement constitués d'eau $\rho = 1000$kg.m^{-3}) et taille caractéristique $r = (m/\rho)^{1/3}$ considèrent que leur coefficient de friction est similaire à celui de la sphère, k. Ils sautent sans vitesse initiale dans l'air. La résistance de l'air est alors $f = k\pi r^2 \dot{z}^2$.

   (a) Déterminez la loi de vitesse de la chute (Principe fondamental de la dynamique).

   (b) Intégrer pour déterminer $\dot{z}$ en faisant apparaître une vitesse limite v_1 et un temps caractéristique τ.

   (c) Déterminer la vitesse de chute aux temps longs, $\frac{t\sqrt{gk\pi r^2}}{\sqrt{m}} \gg 1$.

   (d) Intégrer de nouveau pour déterminer la loi horaire $z(t)$.

   (e) Comment varie $z(t)$ pour $t \ll 1$? Donner le développement limité à l'ordre 2.

   (f) Comment varie $z(t)$ pour $t \ll 1$? Donner le développement limité à l'ordre 4.

   (g) Les sauteurs doivent ouvrir leur parachute lorsqu'il reste 200m sous eux. Au bout de combien de temps doivent-ils ouvrir leur parachute ?

2 Développement limités d'équations différentielles

2.1 Le pendule

L'équation d'un pendule est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$$

1. Linéariser l'équation du pendule à l'ordre 1.
2. Déterminer la fréquence des oscillations aux petits angles.

2.2 Elastique en Caoutchouc : effets non-linéaires

Un élastique en caoutchouc de longueur à vide l est représenté par une loi de comportement non linéaire, $f = k(z-l)^3$. On dit que l'élastique est strain-hardening.

1. Une masse m_1 est suspendue à l'élastique.
   (a) Déterminer la position d'équilibre de la masse reliée à l'élastique.
   (b) Écrire le principe fondamental de la dynamique appliquée à la masse m.
   (c) Linéariser l'équation autour de son point d'équilibre.
   (d) En déduire la fréquence d'oscillation.
2. Une seconde masse m est ajoutée au bout de l'élastique.
3. Déterminer la position d'équilibre des deux masses reliées à l'élastique.
4. Linéariser l'équation autour de son point d'équilibre.
5. En déduire la fréquence d'oscillation.Est-elle plus élevée ou moins élevée que l'oscillation d'une masse unique ?