

Séance 1 Développements limités 1

1 Manipulation de l'écriture $o(x^n)$

1.1 Ordre 3

Soient f et g deux fonction admettant un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0. on a $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + o(x^3)$

1. Que dire de $f + g$?
2. Que dire de fg ?
3. Que dire de αf , où $\alpha \in \mathbb{R}$?
4. Peut-on déterminer un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 ?

1.2 Manipulation des développements limités usuels

Calculer les développements limités suivants :

1. $f(x) = e^{2x}$ en 0 à l'ordre 2.
2. $f(x) = e^{2x}$ en 1 à l'ordre 1.
3. $g(x) = \sin(x)/x$ en 0 à l'ordre 1.
4. $h(x) = \sin(x) - x + x^3/3$ en 0 à l'ordre 5.
5. $i(x) = 2 \cos(x)/(x + 1)$ en 0 à l'ordre 3.

2 Compositions de développements limités

2.1 Exercice 1

1. Déterminer le développement limité de $\tan(x)$ en $x \rightarrow 0$ à l'ordre 5.
2. Déterminer le développement limité de $\frac{\sin(x)}{1 + \ln(1+x)}$ en $x \rightarrow 0$ à l'ordre 4.
3. Déterminer le développement limité de $\exp\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right)$ en $x \rightarrow 0$ à l'ordre 5.

2.2 Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f(x)$.
2. On admet que la fonction réciproque de f , admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

où a , b et c sont des réels.

3 Primitives de développement limités

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(x)$.

1. En calculant le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction dérivée f' , en déduire
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction g définie par $g(x) = \frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}$.

4 Limites et asymptotes

1. Exercice 1

- (a) Donner le développement limité à l'ordre 1, en 0 de $\sqrt{1+3X+2X^2} - 1$
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x+2} - x)$

2. Exercice 2 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1})$

- (a) Déterminer le développement limité la fonction g définie par $g(X) = \ln(1 + \sqrt{1+X})$ à l'ordre 1, au voisinage de 0.
- (b) Montrer que $f(x) = x + \ln(1 + \sqrt{1 + e^{-2x}})$. À l'aide de la question 1, montrer que f admet une asymptote oblique en $+\infty$, on déterminera la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.