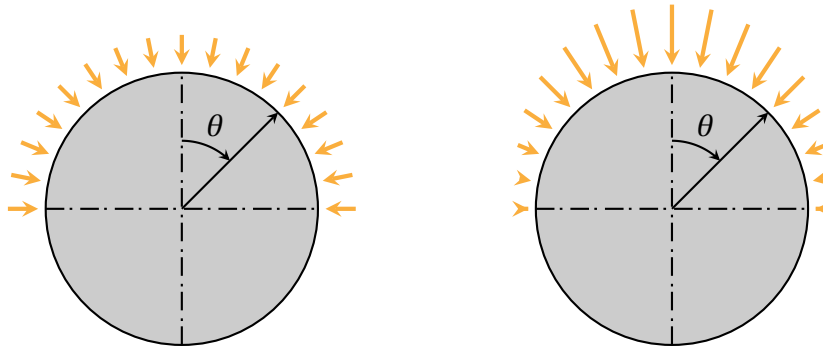


Séance 8 Problèmes de mécanique - 2

1 Répartition de pression sur un coussinet d'alésage

Les coussinets sont des bagues cylindriques interposées entre un arbre et un alésage pour faciliter le mouvement de rotation. On considère un coussinet devant transmettre un effort radial F et on s'intéresse à la répartition de pression au contact coussinet-arbre. On utilise ici des modèles simplifiés de répartition dans lesquels la pression est supposée uniforme le long de l'axe. Une première possibilité (modèle 1) est de supposer une répartition uniforme sur la surface latérale d'un demi-cylindre : $p(M) = p_1$. Une seconde possibilité, (modèle 2) consiste à supposer une répartition proportionnelle à la déformation sur la surface latérale d'un demi-cylindre : $p(M) = p_2 \cos(\theta)$. On note D le diamètre intérieur et L la longueur du coussinet.



1. Exprimer la force exercée sur l'alésage avec une intégrale double. (Attention à l'orientation de l'angle θ .)
2. Calculer la force en fonction de p_1 pour le modèle 1. En déduire p_1 en fonction de F .
3. Calculer la force en fonction de p_2 pour le modèle 2. En déduire p_2 en fonction de F .
4. Quel est la pression maximale pour le modèle 1 et le modèle 2 ?

2 Déformée d'une poutre exotique

Une poutre exotique en grande déformation est modélisée par la déformée suivante à l'aide de l'abscisse curviligne : $\theta'(s) = \frac{\ln(1+s)}{1+s^2}$. On cherche à calculer l'angle en fin de poutre, $\theta(1)$

1. Écrire $\theta(1)$ sous forme intégrale.

2. Préliminaire : Calculer $\int_0^1 \frac{s}{1+st} dt$.

3. En déduire que $\theta(1)$ peut s'écrire $\iint_D \frac{s}{(1+s^2)(1+ts)} dt ds$. Préciser l'ensemble de d'intégration D .

4. L'ensemble D étant carré, les rôles de s et t sont interchangeables. $\theta(1) = \iint_D \frac{t}{(1+t^2)(1+st)} ds dt$.
En déduire que $2\theta(1) = \iint_D \frac{s+t}{(1+t^2)(1+s^2)} ds dt$.

5. Calculer $\theta(1)$.

3 Choix de la conception d'un arbre de transmission

Soit deux arbres de transmission (longueur $L = 1$ m) construits à partir du même acier. Le premier est plein (diamètre D) ; le second est creux (diamètre extérieur D , diamètre intérieur $d = 0,8D$). Le couple à transmettre est $T = 200$ N.m ; la résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de $R_c = 10$ daN.mm⁻².

Déterminer les dimensions optimales des deux arbres et comparer les masses linéiques des deux constructions.

1. Calculer le moment d'aire des deux cylindres en flexion.

2. En déduire le moment d'aire en torsion.

3. Calculer les masses linéiques de chaque cylindre.

4. La condition de fonctionnement est $R_c \geq TL/J$, déterminer le diamètre du cylindre plein et du cylindre creux. Lequel faut-il considérer pour utiliser moins d'acier ?

4 Retour sur les courbes paramétrées

4.1 Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier sont utilisées par les machines CN pour éviter de facétiser les pièces lors des usinages. On se donne quatre points $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ dans le plan, et on cherche à définir une courbe paramétrée

1. qui part de A_0 ;
2. qui arrive en A_3 ;
3. qui est tangente en A_0 à la droite (A_0A_1) ;
4. qui est tangente en A_3 à la droite (A_2A_3) .

Pour cela, on définit les quatre polynômes :

$$p_0(t) = (1-t)^3, \quad p_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad p_2(t) = 3t^2(1-t), \quad p_3(t) = t^3.$$

Soit Γ la courbe paramétrée définie, pour $t \in [0, 1]$, par les formules suivantes,

$$\begin{cases} x(t) = x_0p_0(t) + x_1p_1(t) + x_2p_2(t) + x_3p_3(t) \\ y(t) = y_0p_0(t) + y_1p_1(t) + y_2p_2(t) + y_3p_3(t) \end{cases}$$

1. Cas 1 : On considère les points $A_0 = (0, 0)$, $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = (1, 1)$, $A_3 = (1, 0)$. Dans ce cas, expliciter les formules définissant la courbe Γ .
2. Cas général :

(a) Remplir le tableau suivant :

t	$p_0(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$x(t)$	$y(t)$
0	$p_0(0) =$	$p_1(0) =$	$p_2(0) =$	$p_3(0) =$	$x(0) =$	$y(0) =$
1	$p_0(1) =$	$p_1(1) =$	$p_2(1) =$	$p_3(1) =$	$x(0) =$	$y(1) =$
t	$p'_0(t)$	$p'_1(t)$	$p'_2(t)$	$p'_3(t)$	$x'(t)$	$y'(t)$
0	$p'_0(0) =$	$p'_1(0) =$	$p'_2(0) =$	$p'_3(0) =$	$x'(0) =$	$y'(0) =$
1	$p'_0(1) =$	$p'_1(1) =$	$p'_2(1) =$	$p'_3(1) =$	$x'(0) =$	$y'(1) =$

- (b) Montrer que la courbe Γ définie plus haut répond au problème. On l'appellera courbe de Bézier associée aux quatre points $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$.
- (c) Calculer la vitesse de Γ au point $t = 1/2$, et exprimer cette vitesse à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{A_0A_3}$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$.