Séance 6 Intégrales multiples - 2

1 Intégrales à découpage

1.1 Triangle

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les trois points dont les coordonnées sont les suivantes : $A = (-1/3; 0)$; $B = (-1/3; 1/2)$; $C = (0; 1/2)$. On note D l'intérieur du triangle ABC.

1. Représenter le domaine D dans un repère orthonormé du plan.
2. Calculer $\iint_D (3x - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1.2 Triangle 2

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les trois points dont les coordonnées sont les suivantes : $A = (0; 1)$; $B = (1/2; 1)$ On note D l'intérieur du triangle OAB.

1. Représenter le domaine D dans un repère orthonormé du plan.
2. Calculer $\iint_D \frac{x}{(1+2xy)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1.3 quadrilatère

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les quatre points dont les coordonnées sont les suivantes : $P(0; 1)$; $Q(1; 0)$; $R(1; 3)$; $S(0; 2)$. On note D l'intérieur du quadrilatère $PQRS$.

1. Représenter le domaine D dans un repère orthonormé du plan.
2. Calculer $L = \displaystyle\iint_D \frac{1}{1+3x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2 En trois dimensions

2.1 Cylindre

Considérons le domaine Ω défini par $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1; 1 \leq z \leq \sqrt{3}\}$. Ω est donc la région de l'espace correspondant à l'ensemble des points situés à l'intérieur du cylindre représenté (de façon approximative) ci-dessous :

Calculer l'intégrale triple suivante :

$$M = \iiint_\Omega \frac{z+1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

2.2 Centre de gravité

Calculer le centre de gravité du domaine $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1;\}$

on suppose que a, b et c sont des constantes strictement positives et que le domaine est homogène, c'est à dire de masse volumique constante.

3 Problème de mécanique : la mongolfière

Les montgolfières utilisent l'air chaud pour générer une force inverse à la gravité. (L'air chaud étant moins dense que l'air froid, une force d'Archimède soulève le ballon.) La chaleur est générée par un brûleur à propane suspendu sous l'ouverture du panier. Une fois que le ballon a décollé, le pilote contrôle l'altitude du ballon, soit en utilisant le brûleur pour chauffer l'air et monter, soit en utilisant un évent situé près du sommet du ballon pour libérer l'air chaud et descendre. Le pilote a toutefois très peu de contrôle sur l'orientation du ballon, car les ballons sont à la merci des vents. La montgolfière a été inventée par les frères Montgolfier, Joseph-Michel et Jacques-Étienne, en 1782 (premier vol de démonstration : le 4 juin 1783).

Nous modélisons le ballon en deux pièces. Le sommet du ballon est modélisé par une demi-sphère de rayon 7m. Le bas du ballon est modelé par un tronc de cône. Le rayon de la grande extrémité du tronc est 7 m et le rayon de la petite extrémité du tronc est 4 m :

FIGURE

1. Volume du ballon

   (a) Écrire le volume V du ballon comme la somme de deux intégrales triples.

   (b) Calculer les intégrales triples.

   (c) Proposer une méthode de calcul du volume sans intégrales.

2. Température moyenne de l'air chaud dans le ballon.

   Le ballon a été chauffé avant le décollage, la température de l'air à l'intérieur du ballon varie comme $T_0(r, \theta, z) = \dfrac{z-r}{10} + 210$.

   Calculer la température moyenne dans le ballon $T = \frac{1}{V} \iiint_V T(r, \theta, z) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$.

3. Le ballon pèse près de 95 kg à vide. Quelle est la charge utile du ballon ?

   Rappel : Poussée d'Archimède

   Tout corps plongé dans un fluide au repos, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et égale (et opposée) au poids du volume de fluide déplacé.

4. Effet du brûleur.

   Le pilote active le brûleur pendant 10 secondes. La température de l'air augmente directement au-dessus du brûleur selon la formule $H(r,\theta,z) = -2z - 48$, dans une colonne cylindrique de 4 m de diamètre et 6 m de haut. La température de l'air dans la colonne est donnée par $T1(r,\theta,z) = \frac{z-r}{10} + 210 + (-2z - 48)$, tandis que la température dans le reste du ballon est toujours donnée par $T_0(r,\theta,z) = \dfrac{z-r}{10} + 210$.

   (a) Déterminez la température moyenne de l'air dans le ballon une fois que le pilote a activé le brûleur pendant 10 quelques secondes.

   (b) Quel est la variation de force d'élévation engendrée ?