Séance 4 Abscisse curviligne et polaire - 2

1 Quelques calculs de longueur

1.1 Autour d'une hélice

On considère l'arc Γ, arc d'hélice paramétré et orienté par :

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = ht,$$

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_\Gamma (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz.$$

1.2 Longueur d'une arche de cycloïde

Calculer la longueur d'une arche de cycloïde :

$$\begin{cases} x(t) = a(t-\sin t) \\ y(t) = a(1-\cos t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0;2\pi]$$

1.3 Longueur d'une cardioïde en polaire

Calculer la longueur de la cardioïde d'équation polaire$\rho = a(1+\cos(\theta)$, avec $0 \le \theta \le 2\pi$.

1. Déterminer les expressions de $x(\theta)$ et $y(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta/2)$, $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

2. Déterminer les expression de $x'(\theta)$ et $y'(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta/2)$, $\cos(3\theta/2)$ et $\sin(3\theta/2)$

3. Calculer la longueur de la cardioïde.

2 Repère de Frenet

On considère un point matériel M se déplaçant dans le plan (Oxy) et $R(O,x,y,z)$ un référentiel orthonormé. Les coordonnées du point M dans R sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = t+1 \\ y(t) = t^2+1 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1. Donner l'équation de la trajectoire de M en utilisant les coordonnées cartésiennes. En déduire sa nature.
2. Calculer la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ du point M.
3. Déterminer les vecteurs unitaires tangent $\vec{T}$ à la trajectoire, normal $\vec{n}$ et binormal $\vec{b}$ de la base de Frenet.
4. En déduire le rayon de courbure $1/C$.

3 Problème de mécanique

Sur une broche de tour CN est monté un outil de diamètre $d = 200$ mm. On enclenche le moteur. L'outil met 20 secondes pour atteindre la vitesse angulaire de régime établi, égale à $\omega = 40$ rad/s. L'outil tourne ensuite d'un mouvement uniforme pendant 60 secondes. On coupe le courant, l'outil met 40 secondes pour s'arrêter. On demande pour chacune de ces périodes de déterminer, pour un point de la périphérie de l'outil :

1. L' accélération angulaire $\dot{\omega}$ et l'accélération tangentiellea_T à la périphérie (on admettra que la période de démarrage et celle de ralentissement sont à accélération constante).

   $\omega = \delta$
2. L'accélération normale, à la périphérie, en fonction du temps.

4 Dimensionnement d'une attache de catadioptre

Un catadioptre (dispositif réfléchissant) est attaché à la roue d'un vélo. le cycliste descend avec une vitesse constante de 60 km/h. Il y a roulement sans glissement entre la roue et le sol.

1. Quelle est la vitesse du cycliste en m/s ?
2. En notant v_0 la vitesse du cycliste et r le rayon de la roue, donner l'équation horaire du catadioptre situé à la circonférence d'une roue du vélo.
3. Déterminer l'accélération du catadioptre.
4. Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire.

5. Déterminer la vitesse maximale du catadioptre au cours du mouvement.

6. Déterminer l'accélération maximale du catadioptre. Application numérique : $r = 40cm$.

7. Le catadioptre pèse 50 g et la fixation a été dimensionnée pour résister à une force $F = 50$ N. Le catadioptre est-il bien attaché ? Quelle serait la vitesse maximale autorisée pour éviter le détachement du catadioptre ?