Séance 1 Abscisse curviligne et polaire

1 Étude d'une courbe polaire

On considère la courbe polaire définie par $\rho(\theta) = sin(3\theta), \theta \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la période de ρ ? Quelle propriété graphique en déduire pour la courbe ?
2. Exprimer $\rho(-\theta)$ en fonction de $\rho(\theta)$. Quelles sont les symétries de la courbe ? Montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude à $\theta \in [0, \pi/3]$.
3. Exprimer $\rho(\pi-\theta)$ en fonction de $\rho(\theta)$. En utilisant la périodicité de $\rho(\theta)$, en déduire une relation entre $\rho(\theta)$ et $\rho(\theta+\pi/3)$. Quelles sont les symétries de la courbe ? Montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude à $\theta \in [0, \pi/6]$.
4. Construire le tableau de variations sur $[0, \pi/6]$ en précisant la pente (relative) des tangentes en 0 et $\pi/6$.
5. Dessiner la courbe.

2 Étude d'une courbe polaire 2

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Pour tout réel θ, on note $\vec{u}(\theta)$ le vecteur défini par $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$. On considère la courbe définie en polaires par

$$\rho(\theta) = 1 - \cos(2\theta) - 2\sin(\theta), \qquad \text{pour tout} \quad \theta \in [-\pi/2; \pi/2]$$

On note $M(\theta)$ le point de coordonnées polaires $(\rho(\theta); \theta)$, on souhaite déterminer le lieu des points $M(\theta)$ lorsque le paramètre θ décrit $[-\pi/2; \pi/2]$.

$$\vec{OM}(\theta) = (1 - \cos(2\theta) - 2\sin(\theta))\vec{u}(\theta) \qquad \text{pour tout} \quad \theta \in [-\pi/2; \pi/2].$$

1. Calculer la dérivée de la fonction ρ.

2. En utilisant la formule de linéarisation, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, factoriser l'expression donnant $\rho'(\theta)$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonctionρ sur $[-\pi/2;\pi/2]$.

4. Calculer les coordonnées polaires du point $M(0)$ puis déterminer un vecteur directeur de la tangente en ce point.

5. Même question avec les points $M(-\pi/2)$, $M(\pi/6)$ et $M(\pi/2)$.

6. Tracer l'allure de la courbe en respectant particulièrement les résultats trouvés aux questions précédentes.

3 Retour à Moustier-Sainte Marie

La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant, homogène, tenu à ses deux extrémités. Dans un repère approprié, elle admet pour équation $y(x) = \cosh(x)$.

1. Déterminer la longueur d'un arc de chaînette pendue entre les 2 pics d'une vallée à Moustiers-Sainte Marie. $x \in [0,2]$ (en hectomètres)

2. Préciser le repère de Frénet et la courbure en tout point.

4 Calcul de la masse d'un ressort

Calculer la masse d'un ressort en forme d'hélice. Les équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \qquad ,0 \leq t \leq 10\pi \\ z(t) = at \end{cases}$$

1. Combien de spires comporte le ressort ?

2. Cas 1 : La masse linéique est constante μ.

3. Déterminer l'expression infinitésimale de l'abscisse curviligne.

4. Cas 2 : Le ressort a été mal conçu et s'affine, sa masse linéique varie avec l'abscisse curviligne $\mu(s) = \mu(1-\varepsilon s)$. Calculer la masse du ressort en fonction de ϵ.

5. Avec une tolérance de masse à 1%, quelle est la valeur maximale de ε admissible ?