

## Séance 2 Courbes paramétrées 2

### 1 Folium imprimé en 3D

On considère la courbe paramétrée définie par les équations

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

#### 1.1 Étude préliminaire

1. En utilisant les propriétés de symétrie de la courbe, montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude à  $t \in [-\pi, \pi]$ , puis à  $t \in [0, \pi]$ .
2. Exprimer  $x(\pi - t)$  et  $y(\pi - t)$  en fonction de  $x(t)$  et  $y(t)$ . Montrer que la courbe a une symétrie supplémentaire et qu'on peut restreindre le domaine d'étude à  $t \in [0, \pi/2]$ .
3. Construire le tableau de variations des fonctions  $x$  et  $y$  sur l'intervalle  $[0, \pi/2]$ . On indiquera les valeurs de  $x$ ,  $x'$ ,  $y$  et  $y'$  pour les valeurs  $\pi/6$ ,  $\pi/4$  et  $\pi/3$ .
4. Dessiner la courbe en commençant par la partie correspondant à  $t \in [0, \pi/2]$ , puis en utilisant les symétries pour obtenir l'ensemble de la courbe.

#### 1.2 Impression 3D

On souhaite imprimer en 3D le folium le plus rapidement possible. Néanmoins, la machine d'impression 3D ne peut pas dépasser une vitesse de 10 m/s et avoir des accélérations supérieures à  $100 \text{ m/s}^2$  pour conserver une bonne précision. Pour pouvoir imprimer le plus rapidement possible, la courbe paramétrée est affectée d'un coefficient  $\alpha$  à déterminer,

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2\alpha t) \\ y(t) = \sin(3\alpha t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la vitesse de l'imprimante en fonction du paramètre  $\alpha$ .

2. Calculer la norme de la vitesse de l'imprimante. Déterminer une borne supérieure pour la vitesse de l'imprimante.
3. Calculer l'accélération de l'imprimante en fonction du paramètre  $\alpha$ .
4. Calculer la norme de l'accélération de l'imprimante. Déterminer une borne supérieure pour la vitesse de l'imprimante.
5. Quelle est la valeur optimale du paramètre  $\alpha$  pour un fonctionnement rapide de l'imprimante respectant les contraintes de vitesse et/ou d'accélération ?

## 2 Gravure d'un Astroïde par fraisage CN

On considère la courbe paramétrée définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} x(t) = \sin^3(t) \\ y(t) = \cos^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. En utilisant les propriétés de symétrie de la courbe, réduire le domaine d'étude à un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
2. Construire le tableau de variations pour  $x$  et  $y$ .
3. Donner les coordonnées des points de la courbe quand  $t = 0, \pi/2, \pi$  et donner la pente des tangentes en ces points.
4. Dessiner la courbe.
5. Calculer la longueur et la courbure de l'astroïde.
6. On souhaite graver l'astroïde à l'aide d'une fraiseuse 5 axes. Les fraises s'usent après 500 m d'utilisation. Combien d'Astroïde peut-on graver avant changement de fraise ?
7. La Fraiseuse CN ne peut pas réaliser des courbure supérieures à 50. L'astroïde est-il réalisable avec cette fraiseuse ?

## 3 Branches infinies

On considère la courbe paramétrique définie par les équations suivantes.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t(t-1)} \\ y(t) = \frac{t^2}{(t-1)} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Exprimer  $x(1/t)$  et  $y(1/t)$  en fonction de  $x(t)$  et  $y(t)$ . Déterminer une symétrie de la courbe et en déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à  $I = (-1, 1) \setminus \{0\}$ .
2. Construire le tableau de variations sur  $I$ .
3. Étudier les branches infinies de la courbe sur  $I$ .
4. Dessiner la courbe.