# Séance 1 Courbes paramétrées 1

## 1 Étude d'une courbe paramétrée 1

Étudier la courbe paramétrée donnée par $x(t) = 3t2 - 2$, $y(t) = 3t - t^3$, $t \in \mathbb{R}$

1. Étudier la fonction x(t).
   - (a) Possède-t-elle des symétries ?
   - (b) Peut-on réduire l'intervalle d'étude ?
   - (c) Calculer la dérivée de x(t), en déduire les points critiques.
   - (d) Calculer la dérivée seconde de x(t), en déduire la nature des points critiques (maximum, minimum, point d'inflexion).
   - (e) Calculer la valeur de la fonction aux points critiques.
   - (f) Calculer les valeurs limites de x(t) aux bornes de l'ensemble de définition.
   - (g) Résumer ces résultats dans un tableau de variation.
2. Étudier la fonction y(t).
   - (a) Possède-t-elle des symétries ?
   - (b) Peut-on réduire l'intervalle d'étude ?
   - (c) Calculer la dérivée de x(t), en déduire les points critiques.
   - (d) Calculer la dérivée seconde de x(t), en déduire la nature des points critiques (maximum, minimum, point d'inflexion).
   - (e) Calculer la valeur de la fonction aux points critiques.
   - (f) Calculer les valeurs limites de x(t) aux bornes de l'ensemble de définition.
   - (g) Résumer ces résultats dans un tableau de variation.
3. Déterminer si il y en a les points singuliers.
4. Déterminer, si il y en a, les asymptotes.
5. Tracer l'allure de la courbe paramétrée en prenant soin de placer les tangentes horizontales et verticales.

## 2 Étude d'une courbe paramétrée 2

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos^4(t) \\ y(t) = \sin^4(t) \end{array}\right. , \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

Pour tout $t \in ]0, \pi/2[$ on note $T_t$ la droite tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(x(t), y(t))$. On note $P_t$ l'intersection de $T_t$ avec l'axe $(Ox)$ et $Q_t$ l'intersection de $T_t$ avec l'axe $(Oy)$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et le démontrer.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2. Pour tout $t \in ]0, \pi/2[$, le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} -\cos^2(t) \\ \sin^2(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $T_t$.
3. Pour tout $t \in ]0, \pi/2[$, une équation de $T_t$ est $x \sin^2(t) + y \cos^2(t) = \sin^2(t) \cos^2(t)$.
4. Pour tout $t \in ]0, \pi/2[$, on a $||\vec{OP_t}|| + ||\vec{OQ_t}|| = 1$.
5. Pour tout $t \in ]0, \pi/2[$, la longueur du segment $P_tQ_t$ est égale à 1.

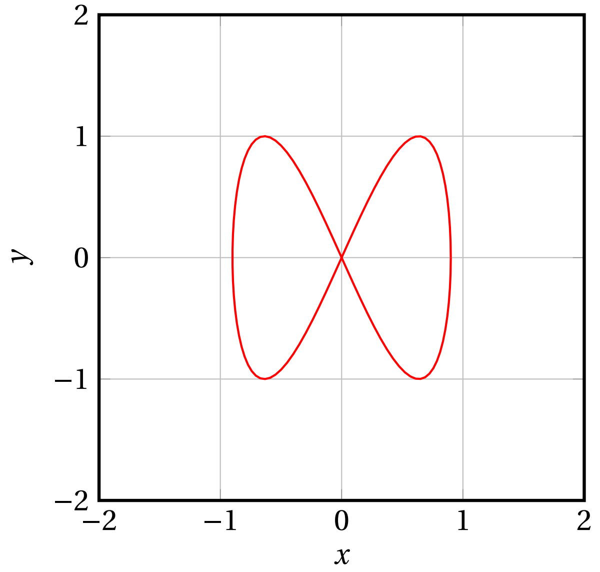
## 3 Étude d'une courbe paramétrée 3

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\Gamma$ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{array}\right. , \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et le démontrer.

1. La courbe $\Gamma$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur de la tangente à la courbe $\Gamma$ au point de paramètre $t$..
3. La tangente à la courbe $\Gamma$ au point $M$ de paramètre $t = \pi/4$ est horizontale.
4. La représentation graphique de $\Gamma$ est :




5. Une équation cartésienne de la courbe $\Gamma$ est $x^2 = 4y^2(1-y^2)$

## 4 Étude d'une courbe paramétrée 4

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\Gamma$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) - \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) + \sin(t) \end{cases}, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et le démontrer.

1. La courbe $\Gamma$ est symétrique par rapport à la droite $y = x$.
2. Pour tout $t \in [0;2\pi]$,
$$y'(t) = \sqrt{2}\cos(t - \pi/4)$$
3. Le tableau suivant donne les variations de $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$

| $t$ | $0$ | | $\pi/4$ | | $5\pi/4$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(t)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $-\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $1$ |

4. La tangente à $\Gamma$ en $t = \pi/4$ est verticale.
5. La courbe $\Gamma$ est un cercle.