

## Séance 3 Différentielle totale

### 1 Différentielle totale

On appelle différentielle totale du premier ordre d'une fonction  $f(x,y)$  l'expression :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \partial_x f dx + \partial_y f dy$$

Les dérivées totales traduisent l'accroissement d'une quantité lorsque plusieurs variables changent. Pour une fonction d'une variable, la dérivée totale et la dérivée partielle sont le même objet. Les dérivées totales sont souvent utilisées en mécanique, mécanique des fluides et thermodynamique.

**Exemple :** volume d'un cylindre anamorphé.

Le volume d'un cylindre est  $V(r, h) = \pi r^2 h$ . La différentielle totale du volume s'écrit :  $dV = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$ . Un cylindre de rayon initial  $r = 10\text{cm}$  et  $h = 20\text{cm}$  est anamorphé  $r + dr = 10,1\text{cm}$  et  $h + dh = 19,8\text{cm}$ .

On calcule facilement  $dr = 0,1\text{cm}$  et  $dh = -0,2\text{cm}$ . La variation de volume correspondante est donc

$$dV = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh = 2\pi \cdot 10 \cdot 0,1 \cdot 20 + \pi \cdot 10^2 \cdot (-0,2) \approx 62,8 \text{ cm}^3$$

On aurait pu calculer les 2 volumes indépendamment pour calculer l'accroissement de volume :

$$V = \pi r^2 h = 6282 \text{ cm}^3 \text{ et } V_{\text{anamorphé}} = \pi (r + dr)^2 (h + dh) = 6345 \text{ cm}^3 \text{ on trouve } dV = 63,4 \text{ cm}^3$$

Le résultat approché (avec la différentielle) est plus rapide à obtenir.

### 2 Différentielle logarithmique

La différentielle logarithmique permet de calculer facilement des variations relatives d'une grandeur. La variation relative d'une grandeur s'écrit

$$\frac{df}{f} = \frac{\partial_x f dx + \partial_y f dy}{f}$$

On peut la considérer facilement comme la différentielle totale du logarithme de  $f$ ,

$$d\ln(f) = \frac{df}{f} = \frac{\partial_x f}{f} dx + \frac{\partial_y f}{f} dy = \partial_x \ln(f) dx + \partial_y \ln(f) dy$$

**Exemple :** Avec cette formule, on peut estimer rapidement la variation relative effectuée sur le calcul du volume.  $\ln(V) = \ln(\pi) + 2\ln(r) + \ln(h)$

$$\frac{dV}{V} = d\ln(V) = 2d\ln(r) + d\ln(h) = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

En effectuant l'application numérique avec les valeurs de variation de rayon et de hauteur, on trouve facilement,

$$\frac{dV}{V} = 2\frac{0.1}{10} - \frac{0.2}{20} \approx 1\%$$

### 3 Calcul d'incertitude

Chaque mesure est entachée d'erreurs dues à la précision des dispositifs. Par exemple, supposons que nous mesurons le côté d'un petit carton cubique. La mesure donne 9,98 cm et nous savons que nos appareils de mesure donnent une précision à 0,05 mètres près. Cependant la valeur théorique est 10 mètres. Il existe donc une différence entre valeur mesurée et valeur théorique. Dans notre cas, cette erreur est de 0,02 mètres.

#### 3.1 Valeur mesurée, erreur de mesure et précision d'un appareil de mesure

Soient  $x$  la valeur mesurée,  $\delta x$  l'erreur de mesure et  $\Delta x$  la précision de l'appareil de mesure. Ainsi, la valeur d'une mesure est toujours donnée avec une incertitude,  $x \pm \delta x$ . On peut majorer cette erreur de mesure par la précision de l'appareil,  $|\delta x| \leq \Delta x$ .

**Exemple :** Pour le carton cubique décrit plus haut,  $x = 9,98$  et  $\delta x = -0,02$  et  $\Delta x = 0,05$ . En pratique, seuls  $x$  et  $\Delta x$  sont connus, l'erreur  $\delta x$  est inconnue, on écrit  $x = 9,98 \pm 0,05$ .

#### 3.2 Erreur absolue

Pour évaluer par exemple le volume du carton cubique, nous allons utiliser la valeur mesurée  $x$ .  $V \approx 994 \text{ cm}^3$ , Avec cette valeur simple, on connaît le volume du carton mais on ne sait pas avec quelle précision cette grandeur est connue. On peut en estimer l'erreur commise avec la différentielle totale. Cette erreur est  $|\delta V| = |x^3 - (x + \delta x)^3|$ , on trouve  $\delta V = 3x^2 \delta x$ .

Si l'on ne connaît que la majoration de  $|\delta x| < |\Delta x|$ , on peut en déduire l'erreur absolue faite sur l'estimation du volume du carton,  $|\Delta V| = 3x^2 \Delta x \approx 15 \text{ cm}^3$ . Le volume du carton est donc  $994 \pm 15 \text{ cm}^3$ .

### 3.3 Erreur relative

Nous avons calculé l'erreur absolue à l'aide de la différentielle totale. Connaît-on cependant le volume du carton avec une bonne précision ?

Pour quantifier une erreur (ou incertitude) on considère le ratio de l'erreur par sa grandeur,  $\frac{\delta x}{x}$ .

**Exemple :** Pour le carton, l'erreur relative est  $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.05}{9.98} = 0.5\%$ . On peut aussi de la même manière calculer l'erreur relative sur le volume du carton,  $\frac{\Delta V}{V} = \frac{15}{994} = 1,5\%$ . Elle est 3 fois plus importante que celle de l'appareil de mesure de longueur.

### 3.4 Calcul d'erreur pour les fonctions à plusieurs variables

On considère  $x$  et  $y$  deux mesures,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  la précision des appareils qui ont mesuré  $x$  et  $y$ . Une grandeur  $f$  est estimée à partir des mesures de  $x$  et  $y$ ,  $f(x, y)$ .

L'erreur absolue  $\Delta f = |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)|$  se calcule grâce à la différentielle totale :

$$\Delta f \simeq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y.$$

$\Delta f$  est l'erreur absolue de la grandeur  $f$ ,  $f \pm \Delta f$ .

Comme pour les fonctions à une seule variable, l'erreur relative est le quotient :  $\frac{\Delta f}{|f(x, y)|}$ . Il existe deux méthodes pour calculer l'erreur relative.

**Méthode 1 :** on considère le ratio de l'erreur absolue par la grandeur,

$$\frac{\Delta f}{|f(x, y)|} = \left| \frac{\partial_x f}{f} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial_y f}{f} \right| \Delta y.$$

**Méthode 2 :** On considère la différentielle logarithmique.

$$\frac{\Delta f}{|f(x, y)|} = |\partial_x \ln(f)| \Delta x + |\partial_y \ln(f)| \Delta y$$

Ainsi, calculer l'erreur relative revient à calculer la différentielle de  $\ln(f)$ .

### 3.5 Quelques exemples

**Mesure d'un cheveu** On mesure un cheveu à l'aide d'un micromètre,  $l = 105 \pm 5 \mu\text{m}$ . Cela signifie que la longueur mesurée est de 105 micro-mètres et que la précision de la mesure est de 5 micro-mètres.

**Vitesse d'un coureur** Un coureur parcourt une distance  $l = 40 \pm 0,1$  m en  $t = 5,8 \pm 0,01$  secondes. La vitesse moyenne du coureur est  $V = l/t = 6,896\text{m/s}$ . Une estimation de l'erreur absolue sur cette vitesse est donnée par la différentielle totale de la vitesse,

$$\Delta V = \left| \frac{1}{t} \right| \Delta l + \left| -\frac{l}{t^2} \right| \Delta t = \frac{0,1}{5,8} + \frac{40 \cdot 0,01}{5,8^2} = 0.0291$$

Donc le coureur va à une vitesse  $V = 6.89 \pm 0.029\text{m/s}$ , l'incertitude de mesure sur sa vitesse est de 0,4%.