Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Séance 2 Points critiques et extrema

1 Extrema

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$, on dit que a est un maximum (resp. un minimum) global de f si

$$\forall x \in U\,, \quad f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a)).$$

On dit que a est un maximum (resp. un minimum) *local* de f si en restreignant l'intervalle de définition U à V, $V \subset U$, $\forall x \in V\,, f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).

L'ensemble des minima et des maxima constituent les extrema. Un extremum est donc soit un minimum, soit un maximum.

2 Relation entre points critiques et extrema

2.1 Rappel pour les fonctions d'une variable

Pour les fonctions d'une variable $f\ :\ x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x)$ continue et dérivable, la recherche d'un extrema se fait

1. En analysant les bornes d'un segment fermé si la fonction est définie.

2. En recherchant les points critiques avec l'équation $f'(x_0) = 0$. En analysant le signe de la dérivée seconde : $f''(x_0) > 0$ c'est un minimum, $f''(x_0) < 0$ c'est un maximum. Si $f''(x_0) = 0$ c'est un point critique indéterminé, ça peut être un minimum, un maximum, ou bien ni l'un ni l'autre (point d'inflexion).

Exemples :

1. La fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ possède pour dérivée $f'(x) = 2x$. Le point critique est en $x_0 = 0$. La dérivée seconde s'écrit $f''(x) = 2$. On l'évalue en x_0, $f''(x_0) = 2 > 0$ donc c'est un minimum.

2. La fonction $f(x) = -2\cosh(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ possède pour dérivée $f'(x) = -2\sinh(x)$. Le point critique est en $\sinh(x_0) = 0 \implies x_0 = 0$. La dérivée seconde s'écrit $f''(x) = -2\cosh(x)$. On l'évalue en x_0, $f''(x_0) = -2\cosh(0) = -2 < 0$ donc c'est un maximum.

3. La fonction $f(x) = (x-1)^3$ définie sur $\mathbb{R}$ possède pour dérivée $f'(x) = 3(x-1)^2$. Le point critique est en $3(x_0-1)^2 = 0 \implies x_0 = 1$. La dérivée seconde s'écrit $f''(x_0) = 6(x-1)$. On l'évalue en x_0, $f''(1) = 0$ donc c'est une forme indéterminée. Ici c'est un point d'inflexion.

2.2 Fonctions de 2 variables : Points critiques

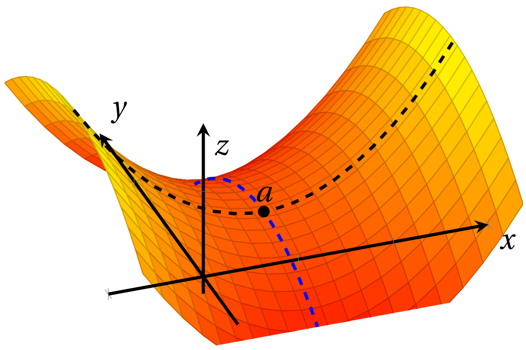
Soit $f(x,y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Si f admet un extremum global en a, alors $\vec{\nabla}(f)(a) = \vec{0}$. ce qui s'écrit aussi $\begin{cases} \partial_x f(a) = 0 \\ \partial_y f(a) = 0 \end{cases}$

1. $\vec{\nabla}(f)(a) = \vec{0}$ définit un point critique pour les fonctions de 2 variables.

2. ATTENTION. Être un point critique est ici une condition nécessaire mais pas suffisante pour être un extremum pour une fonction de deux variable.

   Chez les fonctions de 2 variables, il existe un cas supplémentaire : celui de la selle de cheval où, selon la direction dans laquelle on regarde, on est sur un maximum partiel (courbe bleue) ou un minimum partiel (courbe noire). Ce cas présent est un cas noeud-col ou bien dit “en selle de cheval”.



2.3 Fonctions de plusieurs variables : Points critiques

Soit $f(x_1,\ldots,x_n)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Si f admet un extremum global en a, alors $\vec{\nabla}(f)(a) = \vec{0}$. ce qui s'écrit aussi $\begin{cases} \partial_1 f(a) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n f(a) = 0 \end{cases}$

Les mêmes remarques pour la relation point critique / extrema que pour les fonctions de 2 variables s'imposent.

2.4 Fonctions de plusieurs variables : Détermination des extrema.

Comme pour le fonction d'une seule variable, pour déterminer la narture d'un point critique, on doit s'intéresser au signe de la courbure de la fonction (i.e. au signe de sa dérivée seconde) au niveau de ce point critique. Pour des fonctions de plusieurs variables, l'équivalent de la dérivée seconde est la matrice Hessienne $H(f)$.

1. Soit une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f. On dit que a est un point critique dégénéré si $\det(H(f)(a)) = 0$ et non dégénéré sinon.

   Le cas dégénéré existe aussi pour les fonction d'une seule variable, ce sont les point où la dérivée seconde s'annule au point critique et où on ne peut pas conclure quant à la nature du point critique (e.g. $f(x) = x^3$, forme dégénérée, point critique inflexion de courbe. Alors que $f(x) = x^4$, point critique dégénéré, minimum).

2. Soient $U \subset \mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$ un point critique non dégénéré de f. On calcule les valeurs propres de la matricie Hessienne, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$.

   (a) Si $\forall i \in [1, n]$, $\lambda_i > 0$ alors le point a est un minimum local.

   (b) Si $\forall i \in [1, n]$, $\lambda_i < 0$ alors le point a est un maximum local.

   (c) Si il existe $(i, j) \in [1, n]^2$, tels que $\lambda_i < 0$ et $\lambda_j > 0$ alors le point a est un point col de f.

3. Cas particulier des fonctions de 2 variables :

   Si $\det(H(f)(a)) > 0$, le point a est un extremum local de f, si $\det(H(f)(a)) < 0$, le point a est un point col de f.

4. Un point critique non dégénéré qui n'est pas un extremum local est appelé un *point selle* ou *point col*.

3 Méthode de détermination des extrema

3.1 Exemple fonction de 2 variables

On supposera que les fonctions que l'on étudie sont de classe $\mathscr{C}^2$. $f(x, y, z) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

Étape 1 Calcul du gradient.

$$\frac{\partial f}{\partial_x} = 2(x - y) + 3(x + y)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial_y} = -2(x - y) + 3(x + y)^2$$

Étape 2 Recherche des points critiques. On résout l'équation : $\vec{\nabla} f(x) = \vec{0}$.

$$\begin{cases} \partial_x f = 0 \\ \partial_y f = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2(x - y) + 3(x + y)^2 = 0 \\ -2(x - y) + 3(x + y)^2 = 0 \end{cases} \underset{L1-L2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 4(x - y) = 0 \\ -(x - y) + 3(x + y)^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Étape 3 Nature de chacun des points critiques. Calcul de la matrice Hessienne.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_x^2} = 2+6(x+y)\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = -2+6(x+y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial_y^2} = 2+6(x+y)$$

$$\text{donc} \quad H(f) = \begin{pmatrix} 2+6(x+y) & -2+6(x+y) \\ -2+6(x+y) & 2+6(x+y) \end{pmatrix}$$

On calcule la matruice Hessienne au point critique (0,0) :

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Étape 4 Recherche des valeurs propres de la matrice Hessienne.

$$\det(H(f)(0,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}^{L_1 := L_1 + L_2} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}^{C_2 := C_2 - C_1} = \lambda(\lambda - 4)$$

Les valeurs propres sont donc 0 et 4. Il y a une valeur propre nulle donc le cas est dégénéré.

Méthode plus rapide : Ici, on a une fonction de 2 variables, $\det(H(f)(0,0)) = 0$ (car $L_1 + L_2 = 0$) on est donc dans un cas dégénéré.

Étape 5 Conclusion

On ne peut pas conclure, le cas est dégénéré.

3.2 Exemple fonction de 3 variables

On supposera que les fonctions que l'on étudie sont de classe $\mathscr{C}^2$. $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-z)^2 - 3(z-x)^2$

Étape 1 Calcul du gradient.

$$\frac{\partial f}{\partial_x} = 2(x-y) + 6(z-x) = -4x - 2y + 6z \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial_y} = -2(x-y) + 2(y-z) = 4y - 2(x-z)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial_z} = -2(y-z) - 6(z-x) = 6x - 2y - 4z$$

Étape 2 Recherche des points critiques. On résout l'équation : $\vec{\nabla} f(x) = \vec{0}$.

$$\begin{cases} \partial_x f = 0 \\ \partial_y f = 0 \\ \partial_z f = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -4x - 2y + 6z = 0 \\ 4y - 2(x-z) = 0 \\ 6x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Étape 3 Nature de chacun des points critiques. Calcul de la matrice Hessienne.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_x^2} = -4\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial_y^2} = 4\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial_z^2} = -4\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_z} = 6 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial_y \partial z} = 2$$

$$\text{donc} \quad H(f) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

On calcule la matruice Hessienne au point critique (0,0,0) :

$$H(f) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Étape 4 Recherche des valeurs propres de la matrice Hessienne.

$$\det(H(f)(0,0,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 & 6 \\ -2 & 4-\lambda & 2 \\ 6 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -2 & 4-\lambda & 2 \\ 6 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix}^{L_1 := L_1 + L_3}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 4 \\ 6 & 2 & -10-\lambda \end{vmatrix}^{C_3 := C_3 - C_1} = (2-\lambda)\big((4-\lambda)(-10-\lambda) - 8\big)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda - 48)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda - x_1)(\lambda - x_2)$$

Les valeurs propres sont donc -2 et $x_1 = -3 + \sqrt{57} > 0$ et $x_2 = -3 - \sqrt{57} < 0$. Aucune valeur propre n'est nulle donc le cas est non-dégénéré.

Étape 5 Conclusion

Deux valeurs négatives et une positive, le cas est donc un point col.