

Séance 1 Fonctions de plusieurs variables

1 Fonctions de plusieurs variables

On appelle fonction numérique à n variables toute fonction f définie sur un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R}^n à valeur dans \mathbb{R} ,

$$f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D} \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

1.1 Lignes de niveau

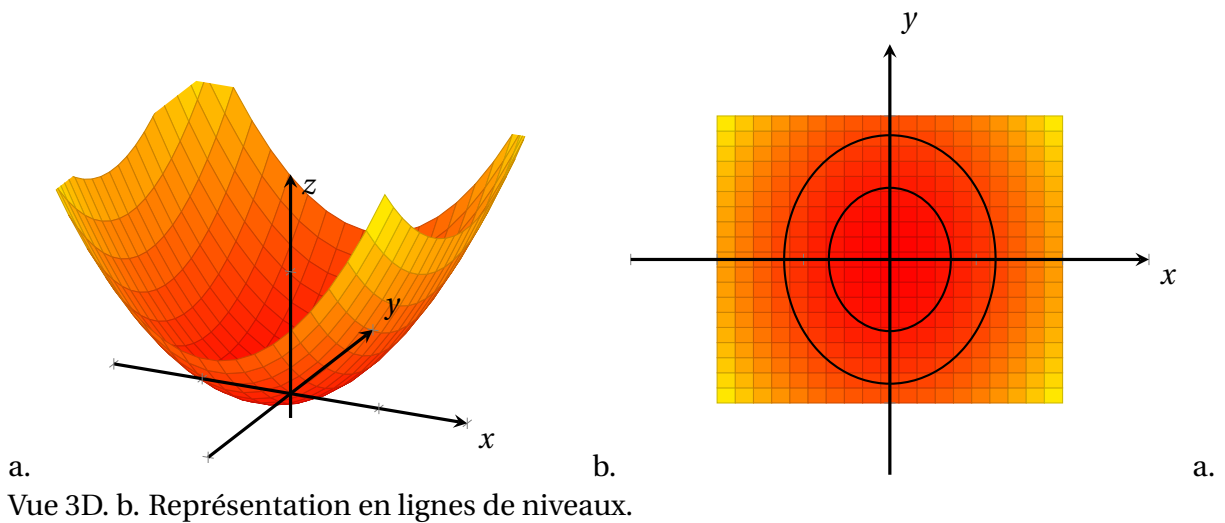
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau λ de f l'ensemble des points $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient l'équation :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda.$$

Remarque La ligne de niveau λ de f s'obtient en faisant l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal d'équation $z = \lambda$.

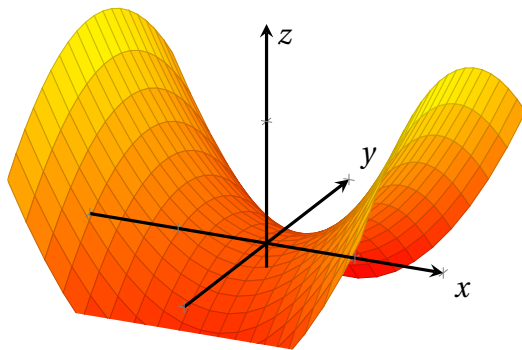
1.2 Représentation des fonctions de 2 variables

1. f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ correspond à un paraboloïde.



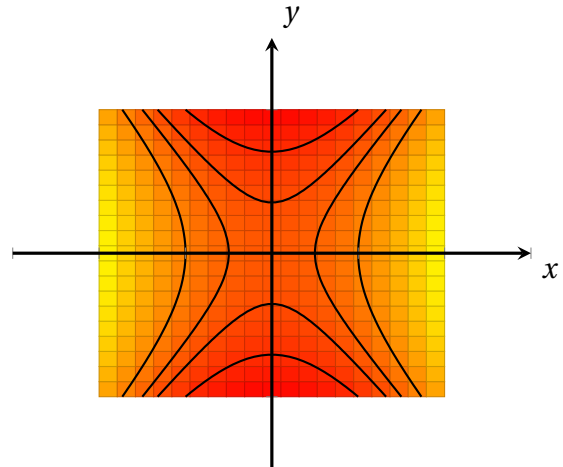
2. f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = 2x + 3y$ correspond à un plan.

3. f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ correspond à une surface en selle de cheval.



a.

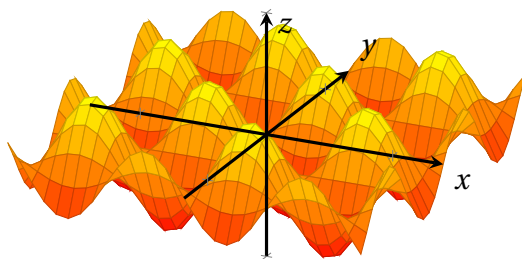
Vue 3D.



b.

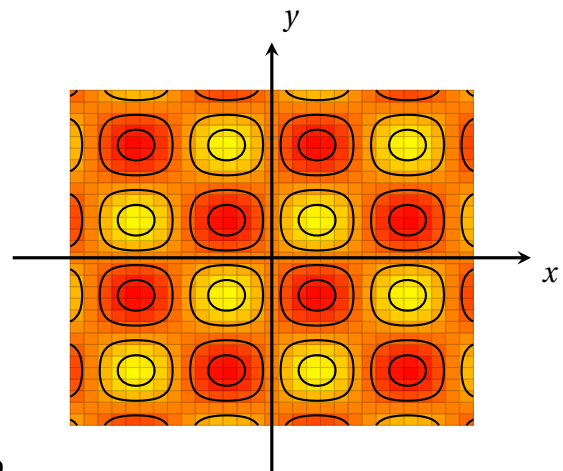
a.

4. f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ correspond à une surface avec des vagues.



a.

Vue 3D.



b.

a.

2 Fonctions partielles

2.1 Fonctions partielles de fonctions à plusieurs variables

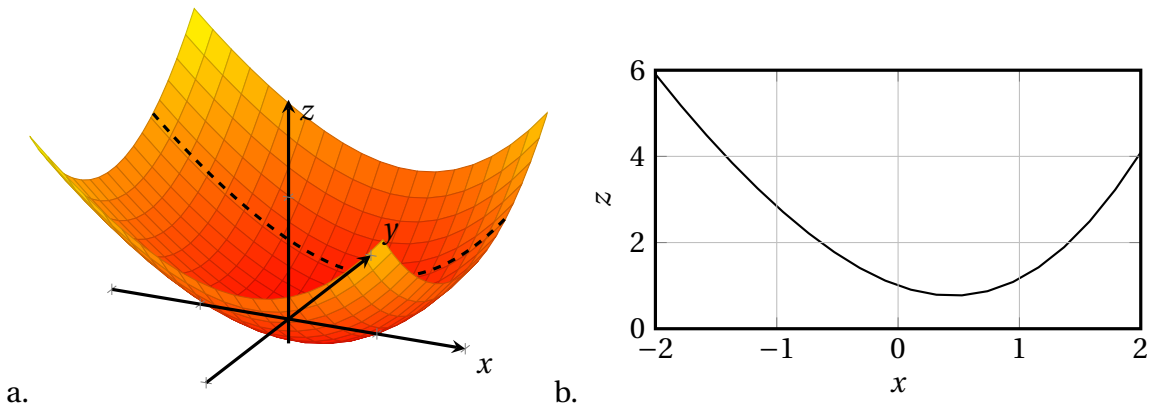
Soit $i \in [1, n]$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle i -ème fonction partielle de f en a la fonction d'une variable réelle,

$$f_{a,i} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n). \end{cases}$$

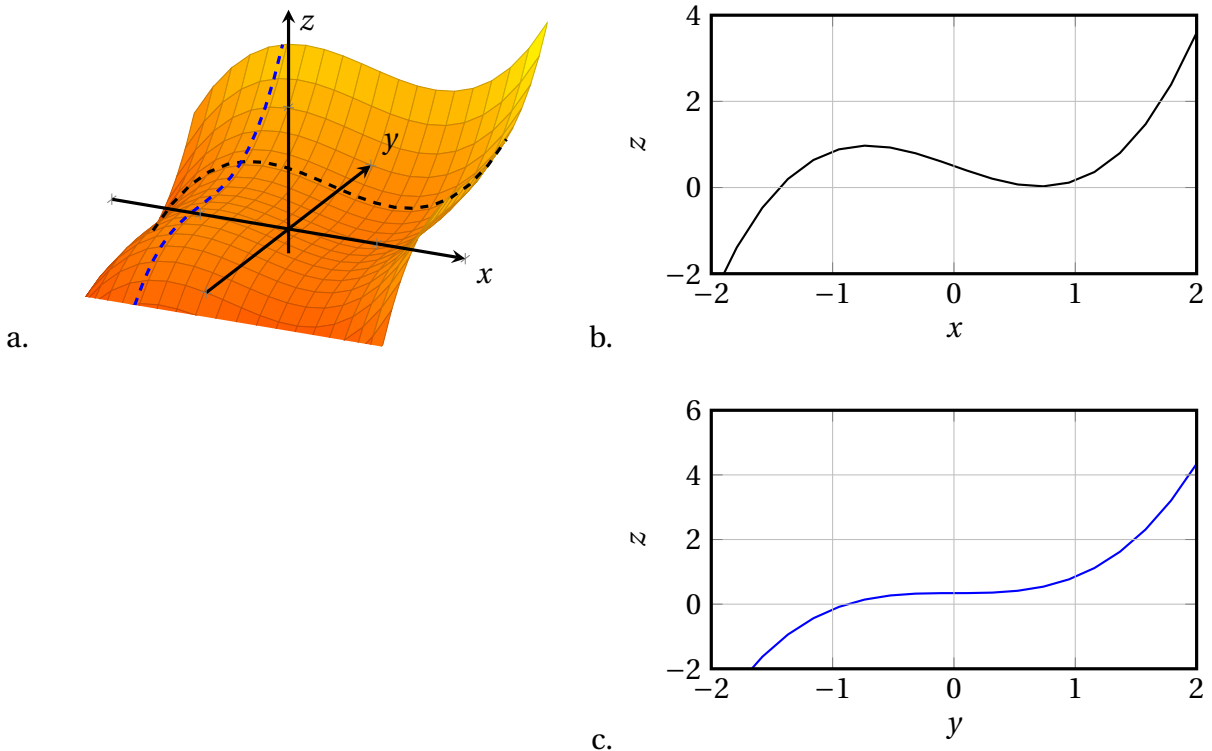
2.2 Fonctions partielles de fonctions à 2 variables

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, la courbe de la deuxième fonction partielle $f_y : y \rightarrow f(a_1, y)$ s'obtient en faisant l'intersection du graphe de f avec le plan d'équation $x = a_1$.

1. Représentation graphique de f_x dans le cas où $f(x, y) = x^2 - \sin(x) + y^2$ et $y = 1$.



2. Représentation graphique de f_x dans le cas où $f(x, y) = x^3/2 - \sin(x) + y^3/2$ et $y = 1$ (Noir).
 Représentation graphique de f_y dans le cas où $f(x, y) = x^3/2 - \sin(x) + y^3/2$ et $x = -1$ (bleu).



3 Dérivées partielles

3.1 Fonctions à 2 variables

On peut considérer $f(x, y)$ comme une fonction de la variable réelle x ou y uniquement en traitant l'autre variable comme une constante. On peut donc dériver la fonction f , soit par rapport à x , soit par rapport à y .

Les dérivées obtenues, notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x d'une part, et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou f'_y d'autre part sont appelées dérivées partielles de f (∂ se lit d rond).

Exemples

1. Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

2. Si $f(x, y) = 3xy + y^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y$.

3.2 Fonctions à plusieurs variables

Soit $i \in [1, n]$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la i -ème variable en a lorsque :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} \text{ existe.}$$

On l'appelle alors dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à la i -ème variable en a et on la note $\partial_i(f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_a$.

Lorsque la fonction n'est pas évaluée en un point particulier, on note $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

3.3 Gradient

On regroupe généralement les dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variable au sein d'un vecteur : le gradient.

Le gradient d'une fonction de deux variables s'écrit :

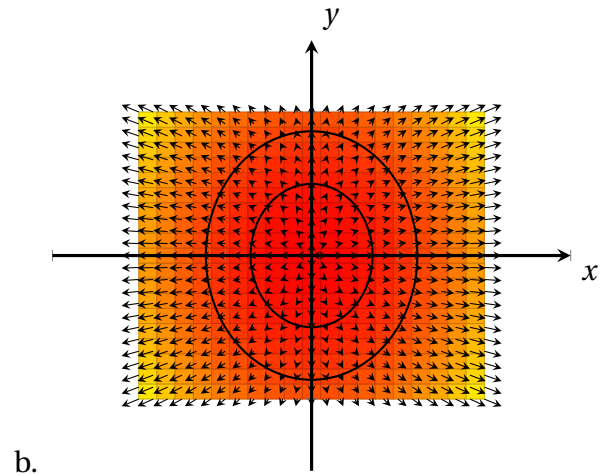
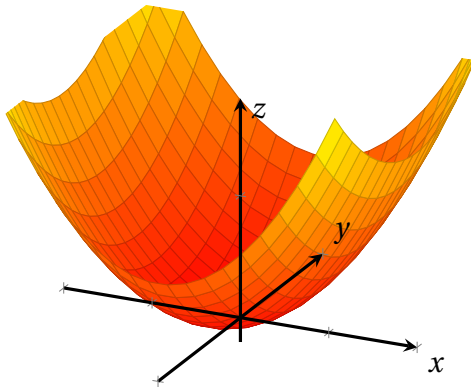
$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}$$

Pour une fonction de plusieurs variables, le gradient s'écrit :

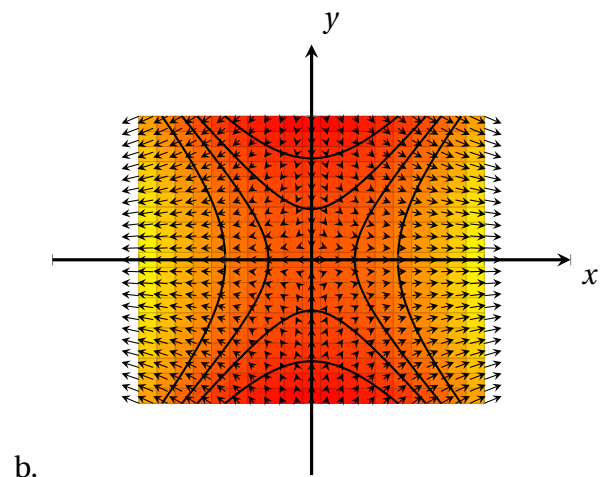
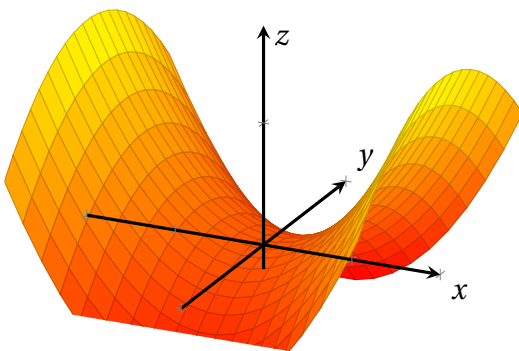
$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_i f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}$$

Le gradient est un champ de vecteurs. Lorsqu'il est évalué en un point de l'espace, il est orthogonal aux lignes de niveau.

1. Parabololoide



2. Selle de cheval



4 Dérivées partielles secondes

4.1 Fonctions à 2 variables

Les dérivées partielles secondes sont obtenues en dérivant la fonction $\partial_x f$ (respectivement $\partial_y f$), soit par rapport à x , soit par rapport à y . Les dérivées secondes sont notées,

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial(\partial_y f)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{et les dérivées croisées} \quad \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial(\partial_y f)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Exemples

- Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

2. Si $f(x, y) = 3xy + y^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y$.

Pour les cas que nous traiterons ensemble, on pourra intervertir l'ordre des dérivées croisées (Théorème de Schwarz pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

4.2 Fonctions à plusieurs variables

La dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la i -ème et j -ème variables s'écrit $\partial_{ij} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

4.3 Matrice Hessienne

De manière similaire pour les dérivées d'ordre 1, on regroupe les dérivées secondes d'une fonction de plusieurs variables dans une matrice, $H_{ij}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Pour 2 variables : $H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ pour n variables $H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$

ou en notation légère,

Pour 2 variables : $H(f) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix}$ pour n variables $H(f) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f & \partial_{12} f & \cdots & \partial_{1n} f \\ \partial_{21} f & \partial_{22} f & \cdots & \partial_{2n} f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} f & \partial_{n2} f & \cdots & \partial_{nn} f \end{pmatrix}$

La Matrice Hessienne des fonctions que l'on considérera ensemble (fonctions de classe \mathcal{C}^2) sera symétrique car $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$