Séance 4 Systèmes différentiels

1 Système différentiel linéaire (ordre 1)

Soit $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$, n fonctions dérivables. On appelle système linéaire d'équations différentielles du premier ordre tout système d'équations différentielles s'écrivant

$$\begin{cases} y_1' &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n + b_1 \\ y_2' &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n + b_2 \\ & \vdots \\ y_n' &= a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n + b_3 \end{cases}$$

où $b_1, b_2, \dots b_n$ sont des fonctions.

On utilise le formalisme matriciel pour condenser les notations :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{Y} + \mathbf{B}$$

B est le second membre du système différentiel.

1.1 Cas où la matrice A est diagonalisable

Soit A une matrice carrée $n \times n$ à coefficients réels diagonalisable. On note les valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ et $(\mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}, \dots, \mathbf{U_n})$ une base de vecteurs propres associés. L'ensemble des solutions de l'équation $Y' = AY$ est un sous-espace vectoriel de dimension n, et les solutions sont:

$$\mathbf{Y}(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{U_1} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x}\mathbf{U_2} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n x}\mathbf{U_n}$$

Si, de plus, on fixe la condition initiale $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y_0}$, la solution existe et est unique.

La démonstration permet de comprendre comment on arrive à ce résultat là :

La matrice A est diagonalisable, on a les relations

$$A = PDP^{-1} \text{ et } D = P^{-1}AP \quad \text{avec } P \text{ la matrice de passage et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En changeant de base, on peut découpler les équation les une des autres. On pose $\mathbf{Z} = P^{-1}\mathbf{Y}$, on obtient,

$$\mathbf{Z'} = P^{-1}\mathbf{Y'} \underset{\mathbf{Y'}=A\mathbf{Y}}{=} P^{-1}A\mathbf{Y} \underset{PP^{-1}=I}{=} P^{-1}A(PP^{-1})\mathbf{Y} \underset{P^{-1}\mathbf{Y}=\mathbf{Z}}{=} P^{-1}AP\mathbf{Z} \underset{P^{-1}AP=D}{=} D\mathbf{Z} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1'(x) = \lambda_1 z_1(x) \\ z_2'(x) = \lambda_2 z_2(x) \\ \vdots \\ z_n'(x) = \lambda_n z_n(x) \end{cases}$$

On a n équations différentielles d'ordre 1 que l'on sait résoudre directement,

$$\begin{cases} z_1(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} \\ z_2'(x) = \alpha_2 e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ z_n'(x) = \alpha_n e^{\lambda_n x} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Il suffit de retourner dans la base originale pour déterminer les solutions,

$$\mathbf{Y} = P\mathbf{Z} \Longleftrightarrow \mathbf{Y}(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{U_1} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x}\mathbf{U_2} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n x}\mathbf{U_n}$$

1.2 Cas où la matrice A est n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais dans $\mathbb{C}$

Dans le cas où est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, il suffit dans la famille génératrice des solutions de remplacer, pour les valeurs propres complexe conjuguées $\lambda, \bar{\lambda}$ et les vecteurs propres complexes conjugués $\mathbf{U}, \bar{\mathbf{U}}$,

$$\alpha e^{\lambda}\mathbf{U} + \beta e^{\bar{\lambda}}\bar{\mathbf{U}} \quad \text{par} \quad \mathrm{Re}\left(\alpha e^{\lambda}\mathbf{U}\right) + \mathrm{Re}\left(\beta e^{\bar{\lambda}}\bar{\mathbf{U}}\right) \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

2 Exemples

2.1 Exemple de système diagonalisable dans $\mathbb{R}$: Système différentiel linéaire homogène (d'ordre 1) à deux équations

Soit un système différentiel linéaire d'ordre 1 à deux équation,

$$\begin{cases} y_1' &= 3y_1 + 4y_2) \\ y_2' &= 4y_1 + 3y_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{Y}$$

Étape 1 : Matrice diagonale.

On détermine si la matrice A est diagonalisable. On cherche les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 7-\lambda \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1:=L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2:=C_2-C_1}{=} -(\lambda-7)(\lambda+1).$$

Il y a deux valeurs propres, -1 et 7, la matrice est de dimension 2×2, elle est donc diagonalisable. La matrice diagonale est

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Vecteurs propres et Matrice de passage.

On cherche le vecteur propre $\mathbf{U_1}$ associé à la valeur propre -1.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -u_{1,1} = 3u_{1,1} + 4u_{1,2} \\ -u_{1,2} = 4u_{1,1} + 3u_{1,2} \end{cases} \quad u_{1,1} = -u_{1,2}$$

$$\text{On fixe} \quad u_{1,2} = 1 \quad \text{donc} \quad \mathbf{U_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche le vecteur propre $\mathbf{U_2}$ associé à la valeur propre 7.

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 7u_{2,1} = 3u_{2,1} + 4u_{2,2} \\ 7u_{2,2} = 4u_{2,1} + 3u_{2,2} \end{cases} \quad u_{2,1} = u_{2,2}$$

$$\text{On fixe} \quad u_{2,2} = 1 \quad \text{donc} \quad \mathbf{U_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et la matrice inverse} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : Résultat du système différentiel sans second membre.

$$\mathbf{Y}_{\text{ssm}} = Ae^{-x}\mathbf{U_1} + Be^{7x}\mathbf{U_2}$$

$$\Longrightarrow y_1 = -Ae^{-x} + Be^{7x} \quad \text{et} \quad y_2 = Ae^{-x} + Be^{7x}$$

2.2 Exemple de système diagonalisable dans $\mathbb{C}$: Système différentiel linéaire homogène (d'ordre 1)

On a l'équation différentielle suivante $y'' - 4y' + 5y = 0$. On a vu lors du cours précédent comment résoudre cette équation linéaire du deuxième ordre. Ici, on peut aussi la résoudre avec le formalisme des systèmes linéaire (C'est d'ailleurs cette méthode qui est implantée sur la plupart les solveurs numériques.)

L'astuce est de poser une fonction intermédiaire $g = y'$. On se retrouve avec le système linéaire

$$\begin{cases} y' = g \\ g' = -5y + 4g \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix}$$

On cherche à diagonaliser la matrice A. On cherche les racines du polynôme caractéristique,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-4+\lambda) + 5 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$[1]

Si l'on calcule le discriminant du polynôme caractéristique, $\Delta = -4 < 0$. Sans surprise la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (sinon on n'aurait pas pu avoir des sinus et des cosinus). Par contre, on peut la diagonaliser dans $\mathbb{C}$.

$$P(\lambda) = (\lambda - 2 + i)(\lambda - 2 - i)$$

On cherche le vecteur propre $\mathbf{U_1}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2 - i$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} (2-i)u_{1,1} = u_{1,2} \\ (2-i)u_{1,2} = 4u_{1,2} - 5u_{1,1} \end{cases} \quad u_{1,2} = (2-i)u_{1,1}$$

$$\text{On fixe} \quad u_{1,1} = 1 \quad \text{donc} \quad \mathbf{U_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

On cherche le vecteur propre $\mathbf{U_2}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2 + i$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} (2+i)u_{2,1} = u_{2,2} \\ (2+i)u_{2,2} = 4u_{2,2} - 5u_{2,1} \end{cases} \quad u_{2,2} = (2+i)u_{2,1}$$

$$\text{On fixe} \quad u_{2,1} = 1 \quad \text{donc} \quad \mathbf{U_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

On a bien vérifié que $\mathbf{U_2} = \bar{\mathbf{U}}_1$. En appliquant la formule du cours, on trouve,

$$\begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left(\alpha e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}\right) + \mathrm{Re}\left(\beta e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}\right)$$

On explicite les constantes complexes $\alpha = p + iq$ et $\beta = r + is$ avec (p, q, r, s) des réels.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix} &= e^{2x} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}((p+iq)(\cos(x) - i\sin(x))) \\ \mathrm{Re}((p+iq)(2-i)(\cos(x) - i\sin(x))) \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}((r+is)(\cos(x) + i\sin(x))) \\ \mathrm{Re}((r+is)(2+i)(\cos(x) + i\sin(x))) \end{pmatrix} \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} p\cos(x) + q\sin(x) \\ (2p+q)\cos(x) + (2q-p)\sin(x) \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} r\cos(x) - s\sin(x) \\ (2r-s)\cos(x) - (2s+r)\sin(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On trouve finalement $y(x) = (p+r)\cos(x)e^{2x} + (q-s)\sin(x)e^{2x}$. En renommant $p + r = a$ et $(q - s) = b$,

$$y(x) = a\cos(x)e^{2x} + b\sin(x)e^{2x}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

[1] Chercher les racines du polynôme caractéristique correspond exactement à l'équation caractéristique.

on retrouve la même formule que dans le cours sur les equations différentielles d'ordre 2. Au passage, on a aussi la formule de la dérivée,

$$g = (2(p+r)+(q-s))\cos(x)e^{2x} + (2(q-s)-(p+r))\sin(x)e^{2x}$$

$$\iff y'(x) = (2a+b)\cos(x)e^{2x} + (2b-a)\sin(x)e^{2x}$$