Séance 3 Equations différentielles : ordre 2

1 Équations différentielles du deuxième ordre

1.1 Généralités

Soit f une fonction de quatre variables. On appelle équation différentielle du deuxième ordre une équation de la forme

$$f(y'', y', y, x) = 0$$

avec $y(x)$ une fonction deux fois dérivable, de dérivée première $y'(x)$ et de dérivée seconde $y''(x)$.

Exemples :

- $y'' = 3y' - 32y^2 + \sin x$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y'', y', y, x) = 0$ en posant

  $$f : (X, Y, Z, T) \mapsto X - 3Y + 32Z^2 - \sin T$$

  Attention, cette équation différentielle est non linéaire

- **Le ressort** Le principe fondamental de la dynamique d'un mobile sur ressort de masse M et de raideur k s'écrit,

  $$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0$$

- **Le pendule** L'évolution de l'angle d'un pendule simple avec un lien de longueur l dans un champ de gravité g, s'écrit

  $$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$$

- En mécanique, les équations différentielles faisant intervenir l'inertie sont (presque toujours) d'ordre 2 !

1.2 Équations différentielles linéaires

Une équation différentielle est dite linéaire lorsque la fonction y, sa dérivée y' et sa dérivée seconde y'' apparaissent à la puissance 0 ou 1 uniquement. Les coefficients peuvent éventuellement dépendre de la variable x ,

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x) = 0, \quad \text{avec } \big(a(x), b(x), c(x)\big) \text{ des fonctions}$$

Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, $c(x)$ est appelé second membre de l'équation différentielle.
Une équation différentielle linéaire à coefficients constants s'écrit,

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) + c = 0, \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

1.3 Équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

Une équation linéaire à coefficients constants est dite homogène si le second membre est nul. On note “ y sans second membre” y_{ssm}. On a directement,

$$y''_{\text{ssm}}(x) + a\,y'_{\text{ssm}}(x) + b\,y_{\text{ssm}}(x) = 0$$

Solutions des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants
Pour trouver les fonctions solutions de l'équation différentielle $y''_{\text{ssm}}(x) + a\,y'_{\text{ssm}}(x) + b\,y_{\text{ssm}}(x) = 0$ (avec a et b des réels donnés) on détermine les solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle,

Équation différentielle du second ordre	Équation caractéristique
$y''_{\text{ssm}}(x) + a\,y'_{\text{ssm}}(x) + b\,y_{\text{ssm}}(x) = 0$	$r^2 + ar + b = 0$

L'équation caractéristique est un polynôme du second degré dont vous savez trouver les racines (éventuellement complexes, $\Delta = a^2 - 4b$.

Cas 1 Discriminant de l'équation caractéristique strictement positif $\Delta > 0$.

$(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r_1 \neq r_2$. Les racines sont réelles. Les solutions de l'équation différentielles sont des exponentielles simples (croissantes ou décroissantes).

$$y_{\text{ssm}}(x) = A\,e^{r_1 x} + B\,e^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}$$

Cas 2 Discriminant de l'équation caractéristique nul $\Delta = 0$.

$(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r_1 = r_2$. Les racines sont réelles. Les solutions de l'équation différentielles sont des exponentielles simples (croissantes ou décroissantes).

$$y_{\text{ssm}}(x) = (Ax + B)\,e^{r_1 x} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}$$

Cas 3 [1] Discriminant de l'équation caractéristique strictement négatif $\Delta < 0$.

Sous cas A $(r_1, r_2) \in (i\mathbb{R})^2$. Les racines sont imaginaires pures. Les racines sont complexes conjuguées donc $r_1 = i\alpha$, $r_2 = -i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle sont des exponentielles complexes que l'on peut réécrire sous forme de sinus et de cosinus. On peut réécrire les solutions de l'équation différentielle :

$$y_{\text{ssm}}(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}$$

Sous cas B $(r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$. Les racines sont complexes conjuguées donc $r_1 = \lambda + i\alpha$, $r_2 = \lambda - i\alpha$ avec $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de l'équation différentielle sont des exponentielles complexes que l'on peut réécrire sous forme de sinus et de cosinus. On peut réécrire les solutions de l'équation différentielle :

$$y_{\text{ssm}}(x) = (A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x))\, e^{\lambda x} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}$$

Cette forme de solution s'appelle la solution générale. Il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision. Pour trouver une solution unique à une équation différentielle du second ordre, il faut donner deux conditions initiales ou limites.

Exemples

1. Résoudre $y''_{\text{ssm}} - 4y_{\text{ssm}} = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 - 4 = 0$. $\Delta > 0$ donc les solutions sont $r1 = -2$ et $r_2 = 2$. La solution générale de l'équation différentielle est donc $y_{\text{ssm}}(x) = Ae^{-2x} + Be^{2x}$.

2. Résoudre $y''_{\text{ssm}} + 4y_{\text{ssm}} = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$. $\Delta < 0$ donc les solutions sont $r1 = -2i$ et $r_2 = 2i$. La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y_{\text{ssm}}(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

3. Résoudre $y'_{\text{ssm}} + 4'y'_{\text{ssm}} + 4y_{\text{ssm}} = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$. $\Delta = 0$ donc les solutions sont $r1 = -2$ et $r_2 = -2$ (racine double). La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y_{\text{ssm}}(x) = (Ax + B)e^{-2x}.$$

4. Résoudre $y''_{\text{ssm}} + 2y'_{\text{ssm}} + 2y_{\text{ssm}} = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$. $\Delta < 0$ donc les solutions sont $r1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$. La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y_{\text{ssm}}(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))\, e^{-x}.$$

[1] En fait, on pourrait garder le même formalisme pour le cas $\Delta < 0$,

$$y_{\text{ssm}}(x) = \text{Re}\left(A\, e^{r_1 x}\right) + \text{Re}\left(B\, e^{r_2 x}\right) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{C}$$

Les sinus et cosinus provenant des exponentielles complexes.

2 Résolution des équations différentielles du second ordre avec second membre

2.1 Solution particulière

La solution particulière est une fonction vérifiant l'équation différentielle avec second membre. On la note y_p.

La solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 et la somme de la solution sans second membre y_{ssm} et de la solution particulière y_p,

$$y(x) = y_{\text{ssm}}(x) + y_p(x)$$

2.2 Méthode de recherche de la solution particulière

2.2.1 Second membre exponentiel-polynôme

Pour les équations différentielles linéaires, si le second membre est un produit exponentiel-polynôme $P(x)e^{\alpha x}$, on cherchera une solution particulière avec la même exponentielle $e^{\alpha x}$.

- Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche

$$y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x} \quad \text{avec} \quad \deg(Q) = \deg(P)$$

- Si α est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche

$$y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x} \quad \text{avec} \quad \deg(Q) = \deg(P) + 1$$

- Si α est racine double de l'équation caractéristique, on cherche

$$y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x} \quad \text{avec} \quad \deg(Q) = \deg(P) + 2$$

Dans tous les cas, il faudra déterminer la valeur des coefficients du polynôme.

2.2.2 Second membre de la forme $e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\big)$

On cherche une fonction de la même forme $e^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big)$ avec Q_1 et Q_2 des polynômes de degré égaux au plus haut degré de $(P_1, P_2) = n$,

- Si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big) \quad \text{avec} \quad \deg(Q_1) = \deg(Q_2) = n.$$

- Si $\alpha + i\beta$ est racine simple de l'équation caractéristique,on cherche

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big) \quad \text{avec} \quad \deg(Q_1) = \deg(Q_2) = n + 1.$$

Dans tous les cas, il faudra déterminer la valeur des coefficients du polynôme.

3 Unicité de la solution (Théorème de Cauchy)

Soit une valeur de la variable x_0, deux valeurs réelles y_0 et z_0 données,
il existe une unique solution à une équation différentielle linéaire d'ordre deux vérifiant

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) = z_0.$$

4 Un exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Chercher les solutions de l'équation différentielle homogène.

  Équation homogène : $y''_{\text{ssm}} - 2y'_{\text{ssm}} + y_{\text{ssm}} = 0$; Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$

  L'équation caractéristique admet une racine double $r = 1$.

  Les solutions de l'équation différentielle homogène sont donc $y_{\text{ssm}} = (Ax+B)e^x \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$

- Chercher une solution particulière à l'équation différentielle.

  Le second membre est de type polynôme de degré 2. On va donc chercher un polynôme de même degré, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a donc $y'p(x) = 2ax + b$ et $y''_p(x) = 2a$.

  On réinjecte dans l'équation différentielle,

  $$y''_p - 2y'_p + y_p = x^2 \Longrightarrow 2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2$$

  On identifie les coefficient : $a = 1$, $-4a + b = 0 \Leftarrow b = 4$ et $2a - 2b + c = 0 \Leftarrow c = 6$

  La solution particulière est donc $y_p(x) = x^2 + 4x + 6$

- Donner la solution générale de l'équation différentielle.

  La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution particulière et de la solution sans second membre donc

  $$y(x) = (Ax + B)e^x + x^2 + 4x + 6$$

- trouver la solution respectant les conditions suivante $y(0) = 5$ et $y'(0) = 4$.

  On calcule y(0) et y'(0), $y(0) = B + 6 = 5 \Leftarrow B = -1$ et $y'(0) = A + B + 4 = 4 \Leftarrow A = 1$

  la solution est donc

  $$y(x) = (x - 1)e^x + x^2 + 4x + 6$$