

Séance 2 Equations différentielles : ordre 1

1 Équations différentielles du premier ordre

Soit f une fonction de trois variables. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme

$$f(y', y, x) = 0$$

avec y une fonction dérivable de la variable x et de dérivée y' .

La plupart des équations différentielles non-linéaires n'ont pas de solutions avec des expressions simples. On va donc, ici, se limiter aux équations différentielles les plus simples : les équations différentielles linéaires.

Exemple :

$2xy'(x) = 3e^x y(x) + x^2$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre : on a bien $f(y', y, x) = 0$ en posant $f : (u, v, w) \mapsto 2wu - 3e^w v + w^2$.

$y'(x)^2 = 3e^x y(x) + \sin(x)$ est une équation différentielle du premier ordre : on a bien $f(y', y, x) = 0$ en posant $f : (u, v, w) \mapsto u^2 - 3e^w v + \sin(w)$. Attention cette équation différentielle est non-linéaire.

1.1 Équations différentielles linéaires

Une équation différentielle est dite linéaire lorsque la fonction y et sa dérivée y' apparaissent à la puissance 0 ou 1 uniquement. Les coefficients peuvent éventuellement dépendre de la variable x

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \quad \text{avec } (a, b) \text{ des fonctions de } x$$

La partie ne dépendant pas de $y'(x)$ ou de $y(x)$ est appelée second membre de l'équation différentielle. Ici $b(x)$ est le second membre de l'équation différentielle.

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants s'écrit,

$$y'(x) = ay(x) + b, \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

1.2 Équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

Une équation linéaire à coefficients constants est dite homogène si le second membre est nul. On note “y sans second membre” y_{ssm} .

$$y'_{\text{ssm}} = ay_{\text{ssm}}$$

Solutions des équation différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'_{\text{ssm}} = ay_{\text{ssm}}$ (avec a un réel donné) sont les fonctions

$$y_{\text{ssm}}(x) = Ae^{ax} \quad \text{où } A \in \mathbb{R} \text{ est une constante arbitraire.}$$

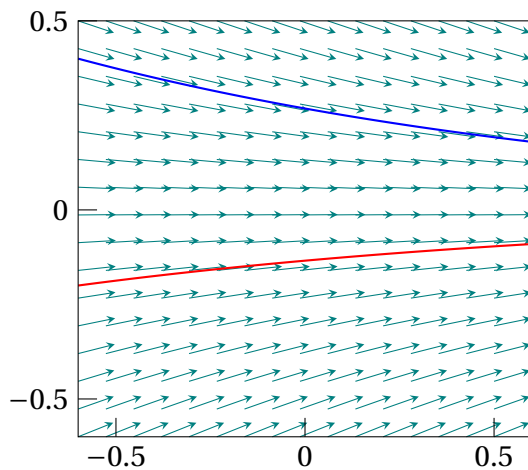
Il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision. Pour trouver une solution unique à une équation différentielle, il faut donner une condition initiale ou limite.

Exemples :

1. Résoudre $(E_1) : 3y' + 2y = 0$

$(E_1) \iff y' = -\frac{2}{3}y$, donc les solutions sont les fonctions de la forme

$$y(x) = Ae^{-2x/3} \quad A \in \mathbb{R}$$



Le champ vectoriel représente la solution générale de l'équation différentielle. Les flèches sont tangentes aux solutions avec une condition aux limites (exemples : en bleu avec la condition initiale $y(0)=0.4$; rouge avec la condition initiale $y(0)=-0.1$).

Cette représentation est donnée pour comprendre la différence entre la solution générale et les solutions particulières.

2. Résoudre $(E_2) : 2y' - 4y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 2$

$(E_2) \iff y' = 2y$, donc les solutions sont les fonctions de la forme

$$y(x) = Ae^{2x} \quad \text{on détermine } A \text{ avec la condition initiale } y(0) = A = 2 \quad \text{donc } y(x) = 2e^{2x}$$

1.3 Unicité de la solution

Le théorème de **Cauchy** assure l'unicité des solutions. Il fait appel à la notion de continuité d'une fonction de plusieurs variables, donc hors de la portée de ce cours.

Si l'on peut écrire l'équation différentielle sous la forme $y' = f(x, y)$ avec f *suffisamment régulière* sur un intervalle ouvert contenant x_0 , alors il existe une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$. Dans la suite du cours, toutes les fonctions considérées seront suffisamment régulières.

Exemple :

Résoudre $(E_1) : 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$.

La fonction $f(x, y) = -\frac{2}{3}y$ est continue, dérivable et de dérivée continue sur \mathbb{R} , elle est *suffisamment régulière*. La solution est donc unique.

Les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = Ae^{-2x/3}$. Donc $y(0) = Ae^0 = A = 1$.

2 Résolutions des équations différentielles linéaires (ordre 1) à coefficients non constants

On cherche à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

avec a, b et f des fonctions continues.

2.1 Équation sans second membre

L'équation sans second membre associée à $a(x)y'_{\text{ssm}} + b(x)y_{\text{ssm}} = f(x)$ est

$$a(x)y'_{\text{ssm}} + b(x)y_{\text{ssm}} = 0$$

Solutions des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants

Les solutions de l'équation différentielle $a(x)y'_{\text{ssm}} + b(x)y_{\text{ssm}} = 0$ sont de la forme

$$y_{\text{ssm}}(x) = Ae^{F(x)} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \quad \text{et } F(x) \text{ une primitive de } -\frac{b(x)}{a(x)}; \quad F = -\int \frac{b(t)}{a(t)} dt$$

Exemples :

1. Résoudre l'équation différentielle $y'_{\text{ssm}} - \sin(x)y_{\text{ssm}} = 0$.

La solution est de la forme

$$y_{\text{ssm}}(x) = Ae^{F(x)} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \quad \text{et } F = \int \sin(t) dt = -\cos(t) + B$$

La solution générale est donc $y_{\text{ssm}}(x) = Ae^{-\cos(x)+B} \equiv Ae^{-\cos(x)}$

2. Résoudre l'équation différentielle $x^2 y'_{\text{ssm}} + y_{\text{ssm}} = 0$

La solution est de la forme

$$y_{\text{ssm}}(x) = Ae^{F(x)} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \quad \text{et } F = -\int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x} + B$$

La solution générale est donc $y_{\text{ssm}}(x) = Ae^{1/x+B} \equiv Ae^{1/x}$

2.2 Équations différentielles linéaires avec second membre

Pour obtenir la solution générale de l'équation complète $a(x)y' + b(x)y = f(x)$, on ajoute la solution générale de l'équation sans second membre y_{ssm} à une solution particulière y_p ,

$$y(x) = y_{\text{ssm}} + y_p$$

Une solution particulière est une fonction vérifiant l'équation différentielle avec second membre.

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle $x^2 y' + y = 2$

La solution générale sans second membre est donc $y(x) = Ae^{1/x+B} \equiv Ae^{1/x}$. La fonction $y(x) = 2$ est une solution particulière. Donc la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est $y(x) = Ae^{1/x} + 2$

3 Techniques pour trouver les solutions particulières

3.1 Second membre exponentiel-polynôme (Équations différentielles linéaires à coefficients constants)

Si le second membre est du type exponentielle polynôme $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$:

1. Cas 1 : $y' - \beta y = P(x)e^{\alpha x}$ avec $\beta \neq \alpha$

On cherchera une solution particulière $y_p = Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q un polynôme de même degré que P, $\deg(Q) = \deg(P)$.

2. Cas 2 : $y' - \alpha y = P(x)e^{\alpha x}$.

On cherchera une solution particulière $y_p = Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q un polynôme d'un degré supérieur à P, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$.

Si P est constant, $p(x) = a$, le second membre est une exponentielle, on cherchera une solution particulière avec la même règle.

Si $\alpha = 0$, le second membre est un polynôme, on cherchera une solution particulière avec un polynôme de même degré.

Exemples :

1. $y'(x) + 2y(x) = 2e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$

Étape 1 : Équation homogène $y'_{\text{ssm}}(x) + 2y_{\text{ssm}}(x) = 0$

Les solutions sont $y_{\text{ssm}} = Ae^{-2x}$.

Étape 2 : Solution particulière

On choisit de chercher une solution de la forme $y_p(x) = Q(x)e^x$ avec $\deg(Q) = 0$. On suppose donc que $y_p(x) = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$.

On réinjecte la solution particulière dans l'équation,

$$y'_p + y_p = ae^x + 2ae^x = 3ae^x = 2e^x$$

On identifie les coefficients, $a = 2/3$.

$$\text{donc } y_p = \frac{2}{3}e^x$$

La solution de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière, donc

$$y(x) = y_{\text{ssm}} + y_p = Ae^{-2x} + \frac{2}{3}e^x$$

2. $y'(x) - y(x) = 2x^2 + 4$ pour $x \in \mathbb{R}$

Étape 1 : Équation homogène $y'_{\text{ssm}}(x) - y_{\text{ssm}}(x) = 0$

Les solutions sont $y_{\text{ssm}} = Ae^x$.

Étape 2 : Solution particulière

On choisit de chercher une solution de la forme $y_p(x) = Q(x)$ avec $\deg(Q) = 2$. On suppose donc que $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On réinjecte la solution particulière dans l'équation,

$$y'_p - y_p = 2ax + b - (ax^2 + bx + c) = -ax^2 + (2a - b)x + (b - c) = 2x^2 + 4$$

On identifie les coefficients, $-a = 2$, $2a - b = 0$, $b - c = 4 \Rightarrow a = -2$, $b = -4$, $c = -8$.

$$\text{donc } y_p = -2x^2 - 4x - 8$$

La solution de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière, donc

$$y(x) = y_{\text{ssm}} + y_p = Ae^x - 2x^2 - 4x - 8$$

3.2 Variation de la constante

Si l'équation différentielle est linéaire savons résoudre l'équation sans second membre : le problème sera souvent de trouver une solution particulière.

Si $Af(x)$ est la solution générale de l'équation sans second membre, on cherche des solutions de l'équation différentielle sous la forme

$$y(x) = A(x)f(x)$$

où la constante $A(x)$ est maintenant une fonction dérivable de la variable x .

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $xy' - 2y = x^3 e^x$

Solution sans second membre : $xy' - 2y = 0 \implies y(x) = A \exp(2 \ln(x)) = Ax^2$

Solution particulière recherchée avec $y_p(x) = A(x)x^2$. On réinjecte dans l'équation avec second membre :

$$x(A'(x)x^2 + 2xA(x)) - 2x^2 A(x) = x^3 A'(x) = x^3 e^x \implies A'(x) = e^x \implies A(x) = e^x$$

Finalement on trouve la solution générale $y(x) = (A + e^x)x^2$ avec $A \in \mathbb{R}$

2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2$

Solution sans second membre : $x^2 y' + (1 - 2x)y = 0 \implies y(x) = A \exp(1/x + 2 \ln(x)) = Ax^2 e^{1/x}$

Solution particulière recherchée avec $y_p(x) = A(x)x^2 e^{1/x}$. On réinjecte dans l'équation avec second membre :

$$x^2(A'(x)x^2 e^{1/x} + 2x e^{1/x} A(x) - A(x)) + (1 - 2x)A(x)x^2 e^{1/x} = x^4 e^{1/x} A'(x) = x^2$$

$$\implies A'(x) = e^{-1/x} / x^2 \implies A(x) = e^{-1/x}$$

Finalement on trouve la solution générale $y(x) = Ax^2 e^{1/x} + x^2$ avec $A \in \mathbb{R}$