Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Séance 1 Systèmes linéaires contraints

1 Rappels sur les systèmes linéaires à n équations et n inconnues

1.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Le système à n équations peut s'écrire sous forme d'une matrice carrée :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right. \implies \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle permet d'écrire un système sous forme condensée.

Par exemple, un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues s'écrit,

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 9 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ -6x + 2y - z = 2 \end{array}\right. \implies \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Attention un système d'équations quelconque ne peut pas à priori s'écrire de manière matricielle. Par exemple,

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 9 \\ 2x^2 - 2y - \sin(z) = 0 \\ -6\sqrt{x} + 2y - xz = 2 \end{array}\right.$$

est un système d'équations non-linéaires (multiplication de variables entre elles, puissance de variables, fonctions trigonométriques de variables,...). Les résultats de ce chapitre ne s'appliquent pas à ce type de système.

1.2 Condition d'unicité d'une solution d'un système linéaire

Un système linéaire possède une solution unique si le déterminant de la matrice du système n'est pas nul.

Exemple A,

$$\begin{cases} 3x+2y-z=9 \\ 2x-2y-z=0 \\ -6x+2y-z=2 \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 36 \implies \text{solution unique}$$

Exemple B,

$$\begin{cases} \sin(\theta)x+\cos(\theta)y=9 \\ \cos(\theta)x-\sin(\theta)y=0 \\ z=2 \end{cases} \implies \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)) = 1 \implies \text{solution unique}$$

Si le déterminant de la matrice représentative d'un système est nul, alors soit, il n'y a pas de solution, soit il existe une infinité de solutions.

Exemple C,

$$\begin{cases} 3x+2y-z=9 \\ 6x-2y-z=0 \\ -3x+4y-2z=2 \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{pas de solution}$$

Exemple D,

$$\begin{cases} 3x+2y-z=8 \\ 6x-2y-z=0 \\ -3x+4y-2z=8 \end{cases} \implies \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{infinité de solutions}$$

Lorsqu'il y a une infinité de solutions, on peut citer 2 solutions distinctes : $(x=0,\ y=2 \text{ et } z=-4)$ et $(x=2,\ y=5/2 \text{ et } z=-7)$.

1.3 Résolution d'un système linéaire

1.3.1 Matrice inverse

Soit A une matrice inversible (i.e. $\det(A) \neq 0$. La matrice inverse de A, notée A^{-1}, s'écrit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\mathrm{com}(A))^T .$$

Inverse d'un produit de matrices : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Le calcul de la matrice inverse se fait en 3 étapes

1. Calcul du déterminant de la matrice $\det(A)$
2. Calcul de la co-matrice $\mathrm{com}(A)$
3. Calcul de la transposée de la co-matrice

Exemple $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculons la matrice inverse.

Étape 1 : cacul du déterminant.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{vmatrix}^{L_1:=L_1-L3} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ -6 & 2 & -1 \end{vmatrix}^{L_2:=L_2-L3} = 9 \times (-4) \times (-1) = 36$$

Étape 2 : Calcul de la comatrice.

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -8 \\ 0 & -9 & -18 \\ -4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : Transposée de la comatrice.

$$(\mathrm{com}(A))^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -8 \\ 0 & -9 & -18 \\ -4 & 1 & -10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & -9 & 1 \\ -8 & -18 & -10 \end{pmatrix}$$

Finalement on donne l'expression de la matrice inverse,

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & -9 & 1 \\ -8 & -18 & -10 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Solution d'un système linéaire

Soit un système linéaire

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{noté} AX = B.$$

Si ce système possède une solution unique (i.e. si $\det(A) \neq 0$), la solution de ce système linéaire est notée $X = A^{-1}B$, où A^{-1} est la matrice inverse de A.

Si l'on considère le système précédent,

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 9 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ -6x + 2y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme on a calculé la matrice inverse au paragraphe précédent, la solution est simplement,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & -9 & 1 \\ -8 & -18 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/9 \\ 37/18 \\ -23/9 \end{pmatrix}$$

2 Système sous-contraint, n equations et m inconnues, $n < m$

2.1 Écriture matricielle d'un système linéaire sous-contraint

Le système à n équations peut s'écrire sous forme d'une matrice si il est linéaire :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle permet d'écrire un système sous forme condensée.

Par exemple, un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues s'écrit,

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + t = 9 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ -6x + 2y - z - 2t = 2 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cette écriture matricielle est valide, on multiplie une matrice de taille 3-lignes,4-colonnes, noté (3,4), par une matrice (4,1) on obtient une matrice (3,1) : $(3,4) \times (4,1) \to (3,1)$.

Ici, il y a un problème, la matrice n'est pas carrée, on ne peut donc pas appliquer les résultats usuels sur les déterminants ni trouver de matrice inverse.

Les systèmes sous-contraints possèdent soit 0, soit une infinité de solutions. On peut être un peu plus précis : Si la famille de n vecteurs est libre dans l'espace vectoriel de dimension m, il y a une infinité de solutions. Si la famille est liée, il y a soit une infinité de solutions ou bien aucune solution. Pour déterminer si la famille est libre ou liée, on ne peut plus utiliser le calcul du déterminant (matrice non-carrée), on doit revenir à la définition de la liberté d'une famille de vecteurs.

2.2 Levée de l'indétermination

Si il y a une infinité de solutions au système, on doit lever l'indétermination du système en ajoutant une contrainte. On pourra rencontrer une multitude de contraintes possibles qui auront pour effet de rajouter $m - n$ équations pour se ramener à un cas m équations, m inconnues que nous savons traiter.

Les contraintes ajoutées peuvent être de nature physique (volume constant, distance minimale, etc.) ou bien mathématique (norme minimale).

2.3 Solution de norme minimale (pseudo-inverse)

Si il n'y a pas de contrainte physique au système, on choisit généralement de déterminer la solution de norme minimale. Le système linéaire s'écrit sous forme condensée :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longrightarrow AX = B$$

où A est une matrice de taille (n, m), X un vecteur de taille $(m, 1)$ et B un vecteur de taille $(n, 1)$.

On cherche la variable X telle que $||X||^2$ soit minimale sachant qu'elle doit valider l'équation $AX - B = 0$. Une technique usuelle pour traiter ce problème est d'utiliser un multiplicateur de Lagrange.

On pose le lagrangien (une fonction scalaire)

$$L(X) = X^2 - \Lambda^T \times (AX - B) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(a_{i,1}x_1 + ... + a_{i,m}x_m - b_i\right), \quad \text{où} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Λ est un vecteur de taille (n,1). Les λ_i sont des scalaires quelconques. On cherche à minimiser cette fonction. La fonction de Lagrange revient à minimiser X^2 directement car on a ajouté des termes nuls (vérifiant les équations du système linéaire). La fonction lagrangienne présentée est une fonction parabolique[1] à n variables. Les coefficients devant les termes carrés sont tous positifs, donc il n'y a qu'un seul point de norme minimale. Pour le trouver, il suffit de considérer la dérivée du lagrangien comme nulle :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{(i,1)} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 2x_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{(i,j)} = 0 \qquad \Longrightarrow 2X = A^T\Lambda \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_m} = 2x_m - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{(i,m)} = 0 \end{cases}$$

On peut déterminer Λ en réinjectant cette équation dans l'équation de départ,

$$AX - B = 0 \Rightarrow (AA^T)\Lambda = 2B \Rightarrow \Lambda = 2(AA^T)^{-1}B \quad \text{Finalement,} \quad X = A^T(AA^T)^{-1}B$$

[1] parabolique : de type x^2

2.4 Équations de compatibilité

Les équations de compatibilité sont les équations que doivent respecter les variables pour qu'il y ait une solution unique. Elles correspondent aux équations représentant le sous-espace vectoriel du noyau de la matrice A.

2.4.1 Noyau d'une matrice

Le noyau d'une application linéaire représentée par la matrice A correspond aux vecteurs **X** tel que

$$A\mathbf{X} = 0.$$

La dimension du noyau est le nombre de vecteurs linéairement indépendants vérifiant l'équation de définition du noyau.

2.4.2 Exemple

Soit le système sous-contraint $(S1)\left\{\begin{array}{l} x+4y+z=2 \\ x-y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$

On cherche le noyau,

$$A\mathbf{X}=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+4y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2x/3 \\ z=5x/3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \text{le vecteur } \begin{pmatrix}1\\-2/3\\5/3\end{pmatrix} \text{est l'unique vecteur générateur du noyau.} \quad \dim(\ker(A))=1.$$

l'équation de compatibilité est simplement la droite engendrée par le vecteur générateur du noyau de A,

$$3x-2y+5z=\lambda \quad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

2.4.3 Rang d'une matrice

Le rang r d'une matrice est le nombre de vecteurs de la matrice linéairement indépendants. Pour une matrice de taille $n\times m$,

$$r \le \min(n,m)$$

.

2.4.4 Théorème du rang

Si l'espace de départ est de dimension n alors

$$r+\dim(\ker(A))=n$$

2.5 Exemple de système sous contraint : résolution à norme minimale

Soit le système $\begin{cases} 2x+2y-4z=3 \\ x-y-z=0 \end{cases}$. Ce système s'écrit sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

On identifie les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule la transposée de A,

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et le produit} \quad AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On calcule l'inverse,

$$\det(AA^T) = \begin{vmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 72-16 = 56 \quad \text{et l'inverse,} \quad (AA^T)^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 24 \end{pmatrix}$$

Finalement en appliquant la formule du cours, on trouve,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 10 & -32 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ -12 \end{pmatrix}$$

3 Système sur-contraint, n equations et m inconnues, $n > m$

Le système à n équations peut s'écrire sous forme d'une matrice si il est linéaire :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle permet d'écrire un système sous forme condensée.

Par exemple, un système linéaire de 4 équations à 3 inconnues s'écrit,

$$\begin{cases} 3x+2y-z=9 \\ 2x-2y-z=0 \\ -6x+2y-z=2 \\ -x+y-z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cette écriture matricielle est valide, on multiplie une matrice de taille 4-lignes,3-colonnes, noté (4,3), par une matrice (3,1) on obtient une matrice (4,1) : $(4,3) \times (3,1) \rightarrow (4,1)$.

Ici il y a un problème, la matrice n'est pas carrée, on ne peut donc pas appliquer les résultats usuels sur les déterminants ni trouver de matrice inverse.

On sait cependant que si le nombre de vecteurs (ici 4) est supérieur à la dimension de l'espace vectoriel (ici 3), alors la famille est forcément liée. Il n'y a pas de solutions sauf si la combinaison linéaire de liaison est aussi valide pour le vecteur B.

3.1 Levée de la surdétermination : moindre carrés (pseudo-inverse)

Il est impossible de lever une surdétermination, mais on peut chercher la solution qui vérifie au mieux toutes les équations, telle que $||AX - B||^2$ soit minimal. Cette technique s'appelle la résolution des moindres carrés.

$$F(X) = ||AX - B||^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j - b_i \right)^2$$

De même que pour le lagrangien, la fonction $F(X)$ est parabolique convexe, on peut donc chercher la solution minimale à partir de l'annulation des dérivées partielles.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j - b_i \right) = 0 \Rightarrow A^T(AX - B) = 0 \Rightarrow X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

3.2 Exemple de système sur-contraint : résolution des moindres carrés

Soit le système $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ x-y=6 \\ x-4y=0 \end{cases}$. Ce système s'écrit sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

On identifie les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule la transposée de A,

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et le produit} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 21 \end{pmatrix}$$

On calcule l'inverse,

$$\det(AA^T) = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 21 \end{vmatrix} = 126 - 1 = 125 \quad \text{et l'inverse,} \quad (AA^T)^{-1} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Finalement en appliquant la formule du cours, on trouve,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 252 \\ 12 \end{pmatrix}$$

4 Résumé

Pour tous les problèmes linéaires $AX = B$ avec n-équations et m-inconnues, on doit retrouver les cas suivants,

Autant d'équations que d'inconnues	$n = m$	$X = A^{-1}B$	si	$\det(A) \neq 0$
Moins d'équations que d'inconnues	$n < m$	$X = A^T(AA^T)^{-1}B$		
Plus d'équations que d'inconnues	$n > m$	$X = (A^TA)^{-1}A^TB$		