Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Séance 1 Fonctions de plusieurs variables

1 Lignes de niveau

1. Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.
   (a) La fonction f est-elle toujours positive ?
   (b) Donner l'équation des lignes de niveau $z = 9$.
   (c) Quelle est l'interprétation géométrique de ces lignes de niveau ?
2. Soit $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 3$.
   (a) Quelle est la borne inférieure de f ?
   (b) Donner l'équation des lignes de niveau $z = 4$.
   (c) Quelle est l'interprétation géométrique de cette ligne de niveau ?
3. Soit $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.
   (a) La fonction f est-elle toujours positive ?
   (b) Donner l'équation des lignes de niveau $z = 5$.
   (c) Quelle est l'interprétation géométrique de cette ligne de niveau ?
4. Soit $f(x, y) = -xy$.
   (a) f est-elle bornée ?
   (b) Donner l'équation des lignes de niveau $z = 1$.
   (c) Quelle est l'interprétation géométrique de cette ligne de niveau ?

2 Fonction partielles

1. Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.
   (a) Déterminer la fonction partielle $f_1(y) = f(1, y)$ en choisissant $x = 1$?

   (b) Déterminer les extrema de la fonction partielle f_1.
   (c) Donner la nature des extrema (maximum ou bien minimum).

2. Soit $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 3$.
   (a) Déterminer la fonction partielle $f_5(x)$ en choisissant $y = 5$?
   (b) Déterminer les extrema de la fonction partielle f_5.
   (c) Donner la nature des extrema (maximum ou bien minimum).

3. Soit $f(x, y) = 4x^3 + 4x^2 y - y + y^2$.
   (a) Déterminer la fonction partielle $f(x, 1)$.
   (b) Déterminer les extrema de la fonction partielle $f(x, 1)$.
   (c) Donner la nature des extrema (maximum ou bien minimum).
   (d) Déterminer la fonction partielle $f_1(y) = f(1, y)$?
   (e) Déterminer les extrema de la fonction partielle f_1.
   (f) Donner la nature des extrema (maximum ou bien minimum).

4. Soit $f(x, y) = -xy$.
   (a) Déterminer la fonction partielle $f_0(x)$ en choisissant $y = 0$?
   (b) Cette fonction a t'elle des extrema ?

3 Dérivées partielles et gradient

1. Soit $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 3$.
   (a) Déterminer la dérivée partielle selon x (on considère y constant) $\partial f / \partial x$. Evaluer en $(x, y) = (1, 1)$. Interpréter la valeur trouvée.
   (b) Déterminer la dérivée partielle selon y (on considère x constant) $\partial f / \partial y$. Evaluer en $(x, y) = (1, 0)$. Interpréter la valeur trouvée.
   (c) Calculer le gradient de f en tout point.
   (d) Déterminer les pentes de la surface en $(x, y) = (1, 1)$ selon les vecteurs $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{u} = (0, 1)$, $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{u} = (1, 2)$.

2. Soit $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.
   (a) Déterminer la dérivée partielle selon x (on considère y constant) $\partial f / \partial x$. Evaluer en $(x, y) = (1, 0)$. Interpréter la valeur trouvée.
   (b) Déterminer la dérivée partielle selon y (on considère x constant) $\partial f / \partial y$. Evaluer en $(x, y) = (1, 1)$. Interpréter la valeur trouvée.
   (c) Calculer le gradient de f en tout point.
   (d) Déterminer la pente de la surface en tout point selon le vecteur $\vec{u} = (1, -1)$.

3. Soit $f(x, y) = -xy$.
   (a) Déterminer la dérivée partielle selon x (on considère y constant) $\partial f/\partial x$.
   (b) Déterminer la dérivée partielle selon y (on considère x constant) $\partial f/\partial y$.
   (c) Calculer le gradient de f en tout point.
   (d) Existe t'il des points où le gradient vaut le vecteur nul ?

4 Dérivées partielles secondes et Matrice Hesienne

1. Soit $f(x, y) = x^3 + 4xy - \frac{3}{2}y - y^2$.
   (a) Déterminer la dérivée partielle selon x (on considère y constant) $\partial f/\partial x$.
   (b) Déterminer la dérivée partielle selon y (on considère x constant) $\partial f/\partial y$.
   (c) Calculer le gradient de f en tout point.
   (d) Déterminer les points où le gradient vaut le vecteur nul.
   (e) Que vaut la pente de la surface en $(x, y) = (1/3, -1/12)$ pour un vecteur quelconque $\vec{u} = (a, b)$?
   (f) Calculer la matrice Hessienne (Matrice des dérivées partielles secondes) de la fonction en tout point. Pour rappel,
   $$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$
   (g) Evaluer la matrice Hessienne en $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{-1}{12})$. Déterminer les valeurs propres de la matrice Hessienne.
   (h) Calculer le déterminant de la matrice Hessienne.
   (i) Le point $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{12})$ est-il un minimum local, un maximum local, un point selle ou bien un indéterminé ?
2. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$.
   (a) Déterminer la dérivée partielle selon x (on considère y constant) $\partial f/\partial x$.
   (b) Déterminer la dérivée partielle selon y (on considère x constant) $\partial f/\partial y$.
   (c) Calculer le gradient de f en tout point.
   (d) Déterminer les points où le gradient vaut le vecteur nul.
   (e) Calculer la dérivée seconde des 2 fonctions partielles f(0,y) et f(x,0). Peut on conclure sur la nature du point où le gradient s'annule ?
   (f) Calculer la matrice Hessienne (Matrice des dérivées partielles secondes) de la fonction en tout point. Pour rappel,
   (g) Diagonaliser la matrice Hessienne.
   (h) Le point $(0, 0)$ est-il un minimum local, un maximum local, un point selle ou bien un indéterminé ?

5 Lien avec la mécanique

Soit F une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et c une constante (la vitesse des ondes). Montrer que la fonction définie par $f(x,t) = F(x+ct)$ vérifie l'équation de la corde vibrante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$