Séance 8 ED : Outils numériques

1 Résolution pas à pas : méthode d'Euler

Lorsque les équations différentielles sont trop compliquées (système de plus de 2 variables, ordre supérieur à 2, ou bien simplement non linéaire), on est souvent rendus à les résoudre numériquement. Il existe différentes méthodes numériques qui permettent de résoudre des équations différentielles, une des plus simple et des plus efficace est la méthode d'Euler. En pratique, il est souvent implémenté la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 dont la vitesse de convergence est meilleure.

1.1 Définition du calcul numérique

Le calcul numérique est un calcul approché et non exact. Pour définir le calcul numérique, on doit disposer de :

1. l'intervalle d'intégration $[t_0, t_1]$ (Exemple : [0,1])
2. de l'écriture **adimensionnalisée** des équations mathématiques.
3. des conditions initiales.
4. du pas de discrétisation Δt.

Le but est de déterminer les valeurs $y(0)$, $y(\Delta t)$, $y(2\Delta t)$, ... , $y(n\Delta t)$. L'intervalle $[t_0, t_1]$ est alors divisé en $N = (t_1 - t_0)/\Delta t$ subdivisions.

Finalement, la méthode numérique renvoie un vecteur $(y_0, y_1, \dots, y_N)$ contenant les valeurs approchées de $y(i\Delta t)$ pour les différents instants $t_i = i\Delta t$.

Il est nécessaire d'avoir autant de conditions initiales que d'équation différentielles lorsque que l'on écrit le problème sous forme d'un système différentiel du premier ordre.

2 Implémentation numérique de la méthode d'Euler

2.1 Adimensionnaliser l'équation différentielle

Avant toute chose, lorsqu'on passe au calcul numérique, il est nécessaire d'adimensionnaliser les équations. La première raison est que l'écriture est plus compacte et qu'on ne risque pas de se tromper d'unités. La seconde raison est que généralement cette adimensionnalisation permet d'éviter de se retrouver à travailler avec des chiffres très grand ou très petit, ce qui peut être source d'erreurs numériques.

Pour adimensionaliser, il faut trouver une combinaison de variables homogènes à un temps, une longueur, parfois une masse (en mécanique, on se limitera à ces 3 grandeurs). Ensuite, il faut remplacer les expressions des dérivées par ces grandeurs pour se ramener à des variables adimensionnelles.

On souhaite adimensionaliser l'équation suivante représentant la chute d'un parachutiste : $mz''(t) = -kz'(t)^2 + mg$ avec k en N.s^2/m^2(≡kg.m/s^2.s^2/m^2=kg/m),g en m/s^2 et m en kg.

On pose $Z = kz/m$ et $T = t \times \sqrt{gk/m}$. On vérifie bien les dimensions : $\left[\frac{m}{k}\right] = \frac{M}{M.L^{-1}} = L$ et $\sqrt{gk/m}$

$$z''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 mZ/k}{\mathrm{d}(T\sqrt{m/gk})^2} = \frac{\mathrm{d}^2 mZ/k}{\mathrm{d}(T\sqrt{m/gk})^2} = \frac{m}{k}\frac{gk}{m}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}T^2} = g\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}T^2} = gZ''(T)$$

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}mZ/k}{\mathrm{d}(T\sqrt{m/gk})} = \frac{m}{k}\frac{\sqrt{gk}}{\sqrt{m}}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}T} = \sqrt{\frac{km}{g}}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}T} = \sqrt{\frac{mg}{k}}Z'(T)$$

Finalement, $mgZ''(T) = -k(\frac{mg}{k}Z'(T))^2 + mg$ en divisant par mg on obtient:

$$Z'' = -Z'^2 + 1$$

Adimensionaliser les équations suivantes :

1. Chute d'une bille dans du miel : $m\ddot{x} + \alpha\dot{(x)} = mg$
   (a) Donner les dimensions de chaque variable.
   (b) Former une longueur de référence, un temps de référence.
   (c) Adimensionnaliser avec les références choisies.
2. Le pendule $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$.
   (a) Donner les dimensions de chaque variable.
   (b) Former une longueur de référence, un temps de référence.
   (c) Adimensionnaliser avec les références choisies.

3. Le double pendule $\begin{cases} (m_1+m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2)\theta_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0 \end{cases}$
   (a) Donner les dimensions de chaque variable.
   (b) Former une longueur de référence, un temps de référence.
   (c) Adimensionnaliser avec les références choisies.

2.2 Écrire les équations différentielles sous forme de systèmes d'ordre 1

En pratique pour implémenter la méthode d'Euler, on doit écrire l'équation différentielle sous forme d'un système d'ordre 1. Pour mettre sous forme de système différentiel d'ordre 1, on fait apparaitre les ordre intermédiaires. Exemple : $y'' - 4y' + 5y = 0$. On pose la fonction intermédiaire $g = y'$. On se retrouve avec le système linéaire

$$\begin{cases} y' = g \\ g' = -5y + 4g \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix}$$

Mettre sous forme de système différentiel les équations suivantes.

1. $y'' + y = 2t + 3$
2. $y''' + 4y'' + 2y - 5e^t = 0$
3. $\begin{cases} y_1'' = -\omega^2 y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$

2.3 Algorithme de la méthode d'Euler

Soit une équation différentielle d'ordre 1, ou un système différentiel d'ordre 1, $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ t_0 \leq t \leq t_1, y(0) = y_0 \end{cases}$
On peut intégrer comme suit (méthode des rectangles à gauche) :

$$y((n+1)\Delta t) = y(n\Delta t) + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(t, y(t))dt \simeq y(n\Delta t) + f(n\Delta t, y(n\Delta t)) \times \Delta t.$$

On itère ensuite de proche en proche :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\Delta t) = y_0 + f(0, y(0)) \times \Delta t \\ y(2\Delta t) = y(\Delta t) + f(\Delta t, y(\Delta t)) \times \Delta t \\ y(3\Delta t) = y(2\Delta t) + f(2\Delta t, y(2\Delta t)) \times \Delta t \\ \vdots \\ y(N\Delta t) = y((N-1)\Delta t) + f((N-1)\Delta t, y((N-1)\Delta t)) \times \Delta t \end{cases}$$

1. Exemple de la chute d'une bille dans du miel.

L'équation différentielle s'écrit $v' = 1 - v$ avec $v(0) = 0$, $t_0 = 0$, $t_1 = 2$, $\Delta_t = 0.5$.

Le schéma itératif d'Euler donne $\begin{cases} v((i+1)\Delta t) = v(i\Delta t) + (1 - v(i\Delta t))\Delta t \\ v(0) = 0 \end{cases}$

1. Calculer à la main le vecteur v.
2. Programmer avec le langage python le calcul du vecteur v. https://trinket.io/embed/python3
3. Intégrer à la main l'équation différentielle et la tracer avec le logiciel Python.
4. Changer le pas $\Delta_t = 0.1$. Comparer.

2. Exemple d'une équation différentielle non-linéaire.

L'équation différentielle s'écrit $y'' + y'/t - y/t^2 = 0$ avec $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $\Delta_t = 0.25$.

1. Déterminer le schéma itératif.
2. Calculer à la main le vecteur v.
3. Programmer avec le langage python le calcul du vecteur v.
4. La solution analytique est $y(x) = t/2 - 1/2t$. Tracer la solution avec le logiciel Python.
5. Changer le pas $\Delta_t = 0.01$. Comparer.