Séance 7 Systèmes linéaires différentiels

1 Échauffement

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$. Trouver la matrice diagonale D et la matrice de passage P.
2. Résoudre l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = 0$.
3. Écrire sous forme de système différentielle l'équation ci-dessus.
4. Résoudre le système différentiel et donner les solutions de l'équation différentielle.

2 Un système du premier ordre

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

1. Écrire le système différentiel sous forme matricielle.
2. Trouver les valeurs propres de la matrice dans $\mathbb{C}$.
3. Diagonaliser la matrice. Donner la matrice diagonale et la matrice de passage.
4. Résoudre le système différentiel.

3 Un système du second ordre

Soit le système différentiel suivant : $\begin{cases} y_1'' = y_1' + y_2 \\ y_2' = y_1' + y_1 - y_2 \end{cases}$

1. Écrire le système différentiel sous forme matricielle.

2. Trouver les valeurs propres de la matrice dans $\mathbb{C}$.
3. Diagonaliser la matrice. Donner la matrice diagonale et la matrice de passage.
4. Résoudre le système différentiel.

4 Problème de mécanique

Le mouvement de balancier d'une télécabine de téléphérique est donné par (Voir cours M. Arroyave):

$$\begin{pmatrix} m_1+m_2 & -m_2 R\cos\alpha \\ -m_2 R\cos\alpha & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\varepsilon}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2 R\, g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Considérer la matrice de masse $M=\begin{pmatrix} m_1+m_2 & -m_2 R\cos\alpha \\ -m_2 R\cos\alpha & I_z \end{pmatrix}$. Inverser cette matrice.
2. Multiplier le système par la matrice M^{-1} pour isoler les $\ddot{\varepsilon}$.
3. Écrire ce système comme un système différentiel d'ordre 1