Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Séance 6 Equations différentielles : ordre 2

1 Montrer qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

1. Montrer que $y_1(t) = t^2$ et $y_2(t) = 1/t$ sont solutions de l'équation différentielle
$$t^2 y''(t) - 2y(t) = 0, t > 0.$$
2. Montrer que $y(t) = at^2 + b/t$ est solution de l'équation précédente quelque soient a et b.

2 Coeffs constants et second membre exponentielle-polynôme

1. $y''(x) + \omega^2 y(x) = 2x$
2. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{-2x}$
3. On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$.
   (a) Résoudre l'équation homogène.
   (b) Trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$.
   (c) Trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{2x}$.
   (d) Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \cosh(2x)$.

3 Coeffs constants et second membre exponentielle-polynôme-trigonométrique

Trouver les solutions des equations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 2\cos(2x)$
2. $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 5\cos(x)$
3. $y'' + y = 2x\cos(x)$

4 Problème de mécanique 1

Trouver la hauteur maximale d'une balle de masse m = 0.1 Kg tirée verticalement par un ressort de raideur $k = 400$ Kg/s^2 and compressed $0.1m$. Utiliser $g = 10$ m/s^2.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique. déterminer l'équation différentielle de la trajectoire de la balle.
2. Intégrer l'équation différentielle.
3. Trouver le temps à laquelle la vitesse de la balle s'annule. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle.
4. Utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour un système conservatif pour trouver facilement la hauteur maximale atteinte par la balle.

5 Problème de mécanique 2 (difficile)

Un parachutiste est freiné par la résistance de l'air, proportionnelle au carré de sa vitesse. On note k = 30 N.m^{-2}.s^2 ce coefficient de proportionnalité, et m = 80 kg la masse du parachutiste.

On applique le principe fondamental de la dynamique : $z''(t) = -kmz'(t)^2 + g$.

1. Intégrer l'équation précédente (penser à la séparation des variables). Déterminer $z'(t)$.
2. À $t = 0$, ayant atteint en chute libre la vitesse de 250 km.h^{-1}, le parachutiste ouvre sa toile. Quelle est la vitesse limite du mouvement ? Au bout de combien de temps la vitesse est-elle devenue inférieure à 20 km.h^{-1} ?