

Séance 2 Systèmes linéaires contraints

1 Résoudre les systèmes $n \times n$ suivants :

1. (S1) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

2. (S2) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 5x - y + 8z = -4 \end{cases}$

3. (S3) $\begin{cases} x - 3y + z - t = 0 \\ -x + 2y - z - 2t = 1 \\ -3x + 7y - 3z - 3t = 2 \\ -x - z - 8t = 3 \end{cases}$

2 Vrai-faux. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

1. Il existe un système linéaire de trois équations et trois inconnues qui possède exactement trois solutions ?
2. Il existe un système à quatre équations et trois inconnues qui possède exactement une solution ?
3. Il existe un système à trois équations et quatre inconnues qui possède exactement une solution ?
4. Un système linéaire avec strictement moins d'inconnues que d'équations possède, ou bien une infinité de solutions, ou bien aucune ?
5. Un système linéaire avec strictement moins d'équations que d'inconnues possède, ou bien une infinité de solutions, ou bien aucune ?

3 Résoudre les systèmes sous-contraints $n \times m$, $n < m$, suivants :

1. (S1) $\{ x + 4y = 2$

2. (S2) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - y - 3z = -1 \end{cases}$

3. (S3) $\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ -x + 2y - z = 3 \\ 2x - z - t = 5 \end{cases}$

4 Résoudre les systèmes sur-contraints $n \times m$, $n > m$, suivants :

1. (S1) $\begin{cases} x = 3 \\ 4x = 6 \end{cases}$

2. (S2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \\ 5x - 4y = -4 \\ x - y = 0 \end{cases}$

3. (S3) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -3x + 7y - 3z = 2 \\ -x - z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

5 Problème

Un joaillier de Syracuse utilisait pour confectionner ses bijoux un alliage d'or et d'argent ; métaux de densités respectives 20 et 10 grammes par cm^3 . Le roi Hiéron II lui commanda une couronne de 5 kg, en exigeant que l'or en constitue au moins 90% de sa masse. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il eut une idée pour vérifier la composition de la couronne. En la plongeant dans l'eau, il constata que son volume était de 370 cm^3 .

1. Que s'est alors écrié Archimède ?
2. Déterminer la matrice A qui, étant donné un bijou fabriqué par ce joaillier, applique le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} \text{masse d'or} \\ \text{masse d'argent} \end{pmatrix} \text{ en le vecteur } Y = \begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix}$$

3. En déduire un calcul de la composition de la couronne.
4. Le joaillier a-t-il intérêt à faire ses bagages rapidement ?