Institut Universitaire de Technologie
Aix Marseille Université

Séance 8 Fractions rationelles

1 Fonction rationnelle

1.1 Définition

Une fraction rationelle est le ratio entre 2 polynômes. Soit 2 polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ définis sur $\mathbb{R}$. La fraction rationnelle de ces deux polynômes s'écrit,

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}, \quad \text{avec X} \in \mathbb{R} - \{X/Q(X) = 0\}$$

1. Attention, une fraction rationelle n'est généralement pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur un ensemble d'intervalles. Les points où le dénominateur s'annule ne sont pas définis.

2. Quelques exemples de fonctions rationnelles

$$F_1 = \frac{3X^2 - X^3}{2X+2}, \quad F_2 = \frac{1}{X+1}, \quad F_3 = \frac{1}{X^2+1}, \quad F_4 = \frac{X(X^3-1)}{(X+1)(X+2)}$$

1.2 Lien avec les fractions rationnelles numériques

Pour une fraction de nombres entiers, si le numérateur et le dénominateur sont des multiples d'un même nombre, alors la fraction se simplifie selon l'exemple suivant,

$$\frac{264}{36} = \frac{2\times 2\times 2\times 3\times 11}{2\times 2\times 3\times 3} = \frac{2\times 11}{3} = \frac{22}{3}$$

De la même façon, si le numérateur $P(X)$ et le dénominateur $Q(X)$ d'une fraction rationnelle $F(X)$ sont des multiples d'un même polynôme $M(X)$, alors on peut simplifier cette fraction,

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{M(X)\,P_1(X)}{M(X)\,Q_1(X)} = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$$

Comme pour les nombres, pour pouvoir simplifier une fraction rationnelle, il faut d'abord factoriser le numérateur et le dénominateur. On peut toujours factoriser les polynômes à coefficients réels par des polynômes de degré 1 ou 2.

On dira donc qu'une fraction rationnelle $F(X)$ est irréductible si le numérateur $P(X)$ et le dénominateur $Q(X)$ de cette fraction n'ont pas de facteur commun. Une fraction rationnelle irréductible ne peut pas se simplifier.

Au contraire, si le numérateur et le dénominateur ont un ou des zéros réels ou complexes communs, alors on peut factoriser le numérateur et le dénominateur de $F(X)$ par un même polynôme, puis simplifier $F(X)$.

1. **Rappel : factorisation d'un polynôme**

   Pour factoriser un polynôme, on cherche ses racines (réelles ou complexes, les racines complexes vont par deux avec le complexe conjugué et donnent des éléments de degré 2 à coefficients réels) et on factorise par le facteur $(X - x_0)$ si x_0 est une racine réelle et par $\big(X-(a+ib)\big)\big(X-(a-ib)\big) = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)$ si $(a+ib)$ est une racine complexe.

2. **Pôle :** On appelle pôle (réel ou complexe) d'une fraction rationnelle irréductible $F(X)$ toute valeur (réelle ou complexe) qui annule son dénominateur $Q(X)$.

3. **Partie entière :** Comme pour les fractions rationnelles numériques, il arrive que le dénominateur soit un multiple du numérateur

   $$\frac{366}{121} = \frac{11 \times 11 \times 3}{11 \times 11} = 3\,.$$

   La fraction rationnelle se simplifie comme un entier simple. Il en est de même pour les fonctions fractions rationnelles. Si $P(X)$ peut se factoriser en un produit de la forme $P(X) = Q(X) \times E(X)$ où $E(X)$ est un polynôme, alors la fraction $F(x)$ se simplifie en

   $$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{Q(X) \times E(X)}{Q(X)} = E(x)$$

   Dans le cas général, le reste $R(X)$ de la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$ n'est pas nul, alors la fraction $F(X)$ ne se réduit pas simplement à un polynôme. Cependant, la division euclidienne s'interprète par la relation, $P(X) = Q(X) \times E(X) + R(X)$ où $E(X)$ et $R(X)$ sont des polynômes, avec deg(R)<deg(Q).

   $$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{Q(X) \times E(X) + R(X)}{Q(X)} = \frac{Q(X) \times E(X)}{Q(X)} + \frac{R(X)}{Q(X)}$$

   $E(X)$ est la partie entière de $F(X)$, elle est non nulle dès que deg(P) $\leq$deg(Q). $R(X)$ est le reste de la division euclidienne de P par Q, deg(R) <deg(Q) .

1.3 Division euclidienne de deux polynômes

Soit deux polynômes $A, B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes vérifiant

$$A = BQ + R, \text{ avec } \deg R < \deg B$$

Q et R sont appelés respectivement le *quotient* et le *reste* de la division euclidienne de A par B.

Exemple :

Diviser $A = X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^2 - X + 1$.

Étape 1: On divise par le monôme de degré deg(A)-deg(B)=5-2=3, donc X^3.

$$R_1 = A - P_1 \cdot B = \underbrace{X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X}_{A} - \underbrace{X^3}_{P_1}\underbrace{(X^2 - X + 1)}_{B} = -2X^3 + 3X^2 - 2X$$

Ce que l'on écrit :

$$\begin{array}{rcrrrrr|rrrcl}
A & = & X^5 & -X^4 & -X^3 & +3X^2 & -2X & X^2 & -X & +1 & = & B \\
-P_1.B & = & -X^5 & +X^4 & -X^3 & & & X^3 & & & = & P_1 \\
R_1 & = & & & -2X^3 & +3X^2 & -2X & & & & &
\end{array}$$

Étape 2 : Le même calcul est effectué sur R_1 pour diminuer encore une fois la puissance du reste. On choisit le monôme de degré deg(R_1)-deg(B)=3-2=1, soit X.

$$R_2 = R_1 - P_2 \cdot B = \underbrace{-2X^3 + 3X^2 - 2X}_{R_1} - \underbrace{-2X}_{P_2}\underbrace{(X^2 - X + 1)}_{B} = X^2$$

Ce qui permet de compléter :

$$\begin{array}{rcrrrrrr|rrrcl}
A & = & X^5 & -X^4 & -X^3 & +3X^2 & -2X & +0 & X^2 & -X & +1 & = & B \\
-P_1.B & = & -X^5 & +X^4 & -X^3 & & & & X^3 & -2X & & = & P_1 + P_2 \\
R_1 & = & & & -2X^3 & +3X^2 & -2X & & & & & & \\
-P_2.B & = & & & +2X^3 & -2X^2 & +2X & & & & & & \\
R_2 & = & & & & +X^2 & & & & & & &
\end{array}$$

Étape 3: On trouve le reste de la division euclidienne. Le même calcul est effectué sur R_1 pour diminuer encore une fois la puissance du reste. On choisit le monôme de degré deg(R_2)-deg(B)=2-2=0, soit $X^0 = 1$.

$$R_3 = R_2 - P_3 \cdot B = \underbrace{X^2}_{R_1} - \underbrace{1}_{P_2}\underbrace{(X^2 - X + 1)}_{B} = X - 1$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrrcl}
A = & X^5 & -X^4 & -X^3 & +3X^2 & -2X & +0 & X^2 & -X & +1 & = & B \\
 & -X^5 & +X^4 & -X^3 & & & & X^3 & -2X & +1 & = & Q \\
 & & & -2X^3 & +3X^2 & -2X & & & & & & \\
 & & & +2X^3 & -2X^2 & +2X & & & & & & \\
 & & & & +X^2 & & & & & & & \\
 & & & & -X^2 & +X & -1 & & & & & \\
R = & & & & & +X & -1 & & & & &
\end{array}$$

Le degré du polynome restant est strictement inférieur au degré du polynome diviseur, le calcul de la division euclidienne est terminé,

$$\underbrace{X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X}_{A} = \underbrace{(X^2 - X + 1)}_{B}\underbrace{(X^3 - 2X + 1)}_{Q} + \underbrace{(X - 1)}_{R}$$

2 Décomposition en éléments simples

Pour pouvoir intégrer une fraction rationnelle, nous devons nous ramener à des éléments simples. On effectue dans un premier temps la division euclidienne puis on exprime le reste de la division euclidienne sous la forme d'une somme d'éléments simples.

2.1 Éléments simples de première espèce

Un élément simple de première espèce est le quotient d'une constante par un polynôme de degré 1 élevé à une puissance entière,

$$F(X) = \frac{A}{(X - x_0)^n} \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Le numérateur d'un élément simple de première espèce est une constante.

Les éléments simples de première espèce s'intègrent facilement,

$$\text{Si n} > 1,\ \int F(X)\,\mathrm{d}X = \int \frac{A}{(X - x_0)^n}\,\mathrm{d}X = \left[\frac{-A}{(n-1)}\frac{1}{(X - x_0)^{n-1}}\right]$$

$$\text{Si n} = 1,\ \int F(X)\,\mathrm{d}X = \int \frac{A}{(X - x_0)}\,\mathrm{d}X = \Big[A\ln(X - x_0)\Big]$$

2.2 Éléments simples de deuxième espèce

Un élément simple de deuxième espèce est le quotient d'un polynôme de degré au plus égal à 1 par un polynôme du second degré **à discriminant strictement négatif** (i.e. à racines complexes conjuguées), élevé à une puissance entière,

$$F(X) = \frac{AX + B}{(aX^2 + bX + c)^n} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R},\ b^2 - 4ac < 0 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Le numérateur d'un élément simple e première espèce est une contante ou un polynome de degré 1.

Les éléments simples de deuxième espèce s'intègrent avec un peu plus de travail,

1. On exprime d'abord le numérateur en fonction de la dérivée du dénominateur$(aX^2 + bX + c)' = 2aX + b$, on obtient

$$AX + B = \frac{A}{2a}(2aX + b) + B - \frac{Ab}{2a}$$

2. On sépare l'intégrale en deux parties,

$$\int F(X)\,\mathrm{d}X = \frac{A}{2a}\int \frac{2aX + b}{(aX^2 + bX + c)^n}\,\mathrm{d}X + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{(aX^2 + bX + c)^n}\,\mathrm{d}X$$

3. On calcule la première intégrale facilement,

$$\text{Si n} > 1,\ \frac{A}{2a}\int \frac{2aX+b}{(aX^2+bX+c)^n}\,\mathrm{d}X = \left[-\frac{A}{2a(n-1)}\frac{2aX+b}{(aX^2+bX+c)^{n-1}}\right]$$

$$\text{Si n} = 1,\ \frac{A}{2a}\int \frac{2aX+b}{(aX^2+bX+c)}\,\mathrm{d}X = \left[\frac{A}{2a}\ln\left(aX^2+bX+c\right)\right]$$

4. On calcule la seconde intégrale de manière plus technique :

   (a) On met le polynome de degré 2 du dénominateur sous forme canonique, $p(X-q)^2+r$, On développe, $p(X-q)^2+r = pX^2-2pqX+pq^2+r$ et on identifie les coefficients terme à terme, $p=a$, $-2pq=b$ et $pq^2+r=c$. On résout finalement, $p=a$, $q=-b/2a$ et $r=c-b^2/4a$

   (b) On réécrit le polynôme, $aX^2+bX+c = a(X+b/2a)^2+(c-b^2/4a)$

   (c) On prépare le changement de variable,

$$aX^2+bX+c = a\left(\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\left(\left(\frac{(aX+b/2)}{\sqrt{ac-b^2/4}}\right)^2+1\right)$$

   (d) Pour simplifier, on pose

$$m = \left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \text{ et } \tan\theta = \frac{(aX+b/2)}{\sqrt{ac-b^2/4}}$$

   (e) On effectue le changement de variable

Changement de variable	$\frac{aX+b/2}{\sqrt{ac-b^2/4}} = \tan(\theta)$	$\theta = \arctan\left(\frac{aX+b/2}{c-b^2/4a}\right)$
Incrément	$\mathrm{d}X = \sqrt{\frac{m}{a}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)}$	

$$\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{1}{(aX^2+bX+c)^n}\,\mathrm{d}X = \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{1}{m(\tan^2\theta+1)^n}\sqrt{\frac{m}{a}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \quad (1)$$

$$= \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\sqrt{\frac{1}{am}}\int(\cos\theta)^{2n-2}\,\mathrm{d}\theta \quad (2)$$

   (f) On sait calculer l'intégrale restante :

   Si $n>1$, On utilise la formule de l'angle double (on linéarise).

$$\text{Si } n=1,\ \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{\mathrm{d}X}{(aX^2+bX+c)} = \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\sqrt{\frac{1}{am}}\theta + C$$

$$= \left(\frac{4aB-2Ab}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\arctan\left(\frac{aX+b/2}{c-b^2/4a}\right)+C$$

3 Intégration de fonctions rationelles complexes

3.1 Réduction en éléments simples

Soit $F(X)$ une fraction rationnelle irréductible et dont le numérateur $P(X)$ est de degré strictement inférieur au dénominateur $Q(X)$, alors $F(X)$ se décompose en une somme d'éléments simples déterminés de la façon suivante :

- Si x_0 est un pôle réel d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $F(X)$ (i.e. racine de multiplicité n du dénominateur), alors la décomposition de $F(X)$ comportera la somme des n éléments simples de première espèce suivante :

$$\frac{A_1}{X - x_0} + \frac{A_2}{(X - x_0)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)^n} \quad \text{avec} \quad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}\,.$$

- Si $a + ib$ et $a - ib$ sont des pôles complexes conjugués d'ordre n de $F(X)$, (i.e. Racines du trinôme du second degré $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ diviseur du dénominateur), alors la décomposition de $F(X)$ comportera la somme des n éléments simples de deuxième espèce suivante :

$$\frac{B_1X + C_1}{X^2 - 2aX + a^2 + b^2} + \frac{B_2X + C_2}{(X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^2} + \cdots + \frac{B_nX + C_n}{(X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^n}$$

$$\text{avec} \quad B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_n, C_n \in \mathbb{R}\,.$$

Les constantes des numérateurs des éléments simples sont déterminées par identification des coefficients du polynome numérateurs P après avoir remis tous les éléments simples sur le même dénominateur Q.

–

3.2 Exemple 1 : intégrale d'une fonction rationnelle

Intégration d'une fonction rationelle : $I = \displaystyle\int_0^{1/2} F(X)\mathrm{d}X = \int_0^{1/2} \frac{X^3 + X - 2}{X^3 - X^2 + 4X - 4}\mathrm{d}X$

Étape 1 Division euclidienne de la fraction rationnelle

$$\begin{array}{crrrr|rrrrc}
A & X^3 & & +X & -2 & X^3 & -X^2 & +4X & -4 = & B \\
 & -(X^3 & -X^2 & +4X & -4) & & & 1 & = & Q \\
R = & & X^2 & -3X & +2 & & & & &
\end{array}$$

$$\text{donc} \quad F(X) = \frac{X^3 - X^2 + X - 1}{X^3 - X^2 + 4X - 4} = 1 + \frac{X^2 - 3X + 2}{X^3 - X^2 + 4X - 4}$$

Étape 2 Factorisation du dénominateur de la fraction rationnelle

(a) Le dénominateur est $Q(X) = X^3 - X^2 + 4X - 4$.

(b) Ici Q est de degré 3, $Q(1) = 0$ est une racine évidente. Donc Q peut se factoriser $Q(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.

(c) On identifie a, b et c en développant l'expression de Q factorisée et en identifiant les coefficients.

$$Q(X) = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c = X^3-X^2+4X-4$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b-a = -1 \\ -c = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

(d) On en déduit $Q(X) = (X-1)(X^2+4)$. On cherche les racines (éventuellement complexes) de $Q(X)$,

$$X^2 + 4 = 0 \longrightarrow X = \pm 2i$$

Q est donc ici déjà sous forme irréductible.

Étape 3 Factorisation du numérateur de la fraction rationnelle

On cherche les racines du numérateur, $X^2 - 3X + 2 = 0 \Longrightarrow X = 1$ ou $X = 2$ donc le numérateur s'écrit $(X-1)(X-2)$.

Étape 4 Simplification de la fraction rationnelle

$$F(X) = 1 + \frac{X^2 - 3X + 2}{(X-1)(X^2+4)} = 1 + \frac{X-2}{X^2+4}$$

Étape 5 Mise sous forme d'éléments simples La fraction rationnelle est directement sous la forme d'un élément simple de seconde espèce.

Étape 6 Intégration des éléments simples

(a) On a un polynome aisé à intégrer $\int 1 \mathrm{d}X = X + C$.

(b) On a un élément simple du second degré, On fait apparaître une forme dérivée et une constante :

$$\frac{X+2}{X^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2X}{X^2+4} - \frac{2}{X^2+4}$$

On intègre la première partie :

$$\int \frac{1}{2}\frac{2X}{X^2+4}\mathrm{d}X = \frac{1}{2}\ln(X^2+4) + C = \ln(K\sqrt{X^2+4})$$

On intègre la seconde partie, en mettant dans un premier temps sous forme canonique :

$$\int \frac{2}{X^2+4}\mathrm{d}X = 2\int \frac{1}{4((X/2)^2+1)}\mathrm{d}X = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(X/2)^2+1}\mathrm{d}X$$

Dans un deuxième temps, on effectue un changement de variable :

$$\text{Changement de variable} \qquad \frac{X}{2} = \tan(\theta) \qquad \theta = \arctan\left(\frac{X}{2}\right)$$

$$\text{Incrément} \qquad \mathrm{d}X = 2\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}X}{(X/2)^2+1} = \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{1}{\tan^2(\theta)+1}2\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)} = \int \cos^2(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2(\theta)}$$

$$= \int \mathrm{d}\theta = \theta + C = \arctan\left(\frac{X}{2}\right) + C$$

1. On donne le résultat final de l'intégration sous forme de primitive

$$\int_0^{1/2} F(X)\mathrm{d}X = \left[X + \frac{1}{2}\ln(X^2+4) - \arctan\left(\frac{X}{2}\right)\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right) - \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

3.3 Exemple 2 : intégration de fonction rationnelle

Intégration d'une fonction rationelle : $I = \int_0^{1/2} F(X)\mathrm{d}X = \int_0^{1/2} \frac{X^3-2X^2+X-2}{X^3-X^2-4X+4}\mathrm{d}X$

Étape 1 Division euclidienne de la fraction rationnelle

$$\begin{array}{cccccc|ccccc}
A & X^3 & -2X^2 & +X & -2 & & X^3 & -X^2 & -4X & +4 = & B \\
 & -(X^3 & -X^2 & -4X & +4) & & & & 1 & = & Q \\
R = & & -X^2 & +5X & -6 & & & & & &
\end{array}$$

$$\text{donc} \quad F(X) = \frac{X^3-2X^2+X-1}{X^3-X^2-4X+4} = 1 + \frac{-X^2+5X-6}{X^3-X^2-4X+4}$$

Étape 2 Factorisation du dénominateur de la fraction rationnelle

(a) Le dénominateur est $Q(X) = X^3 - X^2 - 4X + 4$.

(b) Ici Q est de degré 3, $Q(1) = 0$ est une racine évidente. Donc Q peut se factoriser $Q(X) = (X-1)(aX^2+bX+c)$.

(c) On identifie a, b et c en développant l'expression de Q factorisée et en identifiant les coefficients.

$$Q(X) = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c = X^3-X^2-4X+4$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ -c = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$$

(d) On en déduit $Q(X) = (X-1)(X^2-4)$. On cherche les racines (éventuellement complexes) de $Q(X)$,

$$X^2 - 4 = 0 \longrightarrow X = \pm 2 \quad \text{donc} \quad Q(X) = (X-1)(X-2)(X+2)$$

Étape 3 Factorisation du numérateur de la fraction rationnelle

On cherche les racines du numérateur, $-X^2 + 5X - 6 = 0 \Longrightarrow X = 2$ ou $X = 3$ donc le numérateur s'écrit $-(X-2)(X-3)$.

Étape 4 Simplification de la fraction rationnelle

$$F(X) = 1 + \frac{-(X-2)(X-3)}{(X-1)(X+2)(X-2)} = 1 - \frac{(X-3)}{(X-1)(X+2)}$$

Étape 5 Mise sous forme d'éléments simples

On applique le théorème de décomposition en éléments simples :

$$F(X) = 1 + \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+2}$$

Pour identifier A et B, on remet tout au même dénominateur et on identifie,

$$F(X) = 1 + \frac{(A+B)X + (2A-B)}{(X-1)(X+2)} = 1 + \frac{-X+3}{(X-1)(X+2)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ 2A - B = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 2/3 \\ B = -5/3 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad F(X) = 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{X-1} - \frac{5}{3} \times \frac{1}{X+2}$$

Étape 6 Intégration des éléments simples

(a) On a un polynome aisé à intégrer $\int 1 \mathrm{d}X = X + C$.

(b) On a un élément simple de première espèce que l'on intègre,

$$\int \frac{1}{X-1} \mathrm{d}X = \ln(|X-1|) + C$$

(c) On a un autre élément simple de première espèce,

$$\int \frac{1}{X+2} \mathrm{d}X = \ln(|X+2|) + C$$

1. On donne le résultat final de l'intégration sous forme de primitive

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} F(X) \mathrm{d}X &= \left[X + \frac{2}{3} \ln(|X-1|) - \frac{5}{3} \ln(|X+2|) \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{8}{3} \ln(2) + -\frac{5}{3} \ln(5) \end{aligned}$$