

Séance 7 Techniques d'intégration

Pour trouver une primitive, on doit effectuer plusieurs tentatives :

1. Repérer la forme d'une fonction simple f'
2. Repérer une forme composée $f' \times g' \circ f$
3. Essayer une intégration par parties $u'v = uv - v'u$
4. Essayer un changement de variable
5. Il existe d'autres techniques mais elles sont en dehors du cadre de ce cours.

Nous allons développer ici la technique d'intégration par parties et les changements de variables.

1 Intégration par parties (IPP)

si u et v sont deux fonctions continues et dérivables sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

C'est une conséquence immédiate de la formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, donc

$$\left[uv \right]_a^b = \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Cette formule peut paraître peu intéressante dans la mesure où on se contente de remplacer une intégrale de produit par une autre intégrale de produit, mais elle est en fait extrêmement importante en pratique. Elle sera très souvent utilisée dans le cas d'un calcul d'intégrale de produit peu évident, que l'on souhaite transformer un produit plus simple. On essaiera donc de prendre pour u des fonctions qui se simplifient en dérivant (par exemple $u(t) = t$, ou $u(t) = \ln(t)$), et pour v' des fonctions qui ne se compliquent pas trop quand on intègre (par exemple $v'(t) = e^t$).

Exemple 1 : On peut calculer une primitive de la fonction $f(x) = \ln(x)$ à l'aide d'une IPP. Prenons la primitive qui s'annule en 1, et qui est donc définie par $F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$. Il n'y a pas de produit, ce qui peut sembler rédhibitoire pour une IPP. Astuce, on crée artificiellement un produit,

$$F(x) = \int_1^x 1 \times \ln(t) dt \quad \begin{array}{l} \text{on pose} \quad u(t) = \ln(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = 1 \\ \text{on obtient} \quad u'(t) = 1/t \quad \text{et} \quad v(t) = t \end{array}$$

On applique la formule des intégrations par parties,

$$F(x) = \left[t \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t} dt = x \ln(x) - x + 1$$

Généralement, on prend la primitive qui s'annule en 0, $F(x) = x \ln(x) - x$ comme primitive de \ln (Ne diffère de la précédente que par une constante).

Exemple 2 : On souhaite calculer $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$.

$$\text{Première IPP : } I = \int_0^1 x^2 e^x dx \quad \begin{array}{l} \text{on pose} \quad u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x \\ \text{on obtient} \quad u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad v(x) = e^x \end{array} .$$

$$\text{Finalement, } I = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx$$

$$\text{Seconde IPP : } I = e - 2 \int_0^1 x e^x dx \quad \begin{array}{l} \text{on pose} \quad u(x) = x \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x \\ \text{on obtient} \quad u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = e^x \end{array} .$$

$$\text{Finalement, } I = e - 2 \left[x e^x \right]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx = e - 2e + 2 \left[e^x \right]_0^1 = e - 2e + 2e - 2 = e - 2$$

Exemple 3 : On souhaite calculer $I = \int_0^\pi (x - 1) \sin(x) dx$.

$$\text{Première IPP : } I = \int_0^\pi (x - 1) \sin(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{on pose} \quad u(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \sin(x) \\ \text{on obtient} \quad u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = -\cos(x) \end{array} .$$

$$\text{On obtient, } I = \left[-(x - 1) \cos(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x) dx = (\pi - 1) - 1 + \int_0^\pi \cos(x) dx$$

$$\text{Finalement, } I = \pi - 2 + \left[\sin(x) \right]_0^\pi = \pi - 2$$

2 Changement de variable

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, soit φ la fonction changement de variable. Alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

On obtient ce résultat à partir de la formule de dérivation d'une composée : $\varphi' \times f \circ \varphi$ a pour primitive $F \circ \varphi$ (où F est une primitive quelconque de f), donc

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx &= \left[F \circ \varphi(x) \right]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F(\varphi(\varphi^{-1}(b))) - F(\varphi(\varphi^{-1}(a))) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

Exemple 1: Calculons $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$	Changement	$(\varphi = \sin)$	$(\varphi^{-1} = \sin^{-1} = \arcsin)$
	de variable	$x = \sin(t)$	donc $t = \arcsin(x)$
	Bornes	$0 \rightarrow \arcsin(0) = 0$	et $1 \rightarrow \arcsin(1) = \pi/2$
	Incrément	$dx = \cos(t)dt$	

On peut transformer l'intégrale en

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(t)^2} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos(t)^2} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} |\cos(t)| \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi/4 \end{aligned}$$

Exemple 2: Calculons $I = \int_1^a \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

$I = \int_1^a \frac{1}{x \ln(x)} dx$	Changement	$(\varphi = \exp)$	$(\varphi^{-1} = \exp^{-1} = \ln)$
	de variable	$x = \exp(t)$	donc $t = \ln(x)$
	Bornes	$1 \rightarrow \ln(1) = 0$	et $a \rightarrow \ln(a)$
	Incrément	$dx = \exp(t)dt$	

On peut transformer l'intégrale en

$$I = \int_0^{\ln(a)} \frac{1}{\exp(t) \ln(\exp(t))} \exp(t) dt = \int_0^{\ln(a)} \frac{1}{t} dt = \left[\ln(t) \right]_1^{\ln(a)} = \ln(\ln(a))$$

Exemple 3: Calculons $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$.

$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$	Changement	$(\varphi = \text{sh})$		$(\varphi^{-1} = \text{sh}^{-1} = \text{argsh})$
	de variable	$x = \text{sh}(t)$	donc	$t = \text{argsh}(x)$
	Bornes	$0 \rightarrow \text{argsh}(0) = 0$	et	$1 \rightarrow \text{argsh}(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$
	Incrément	$dx = \text{ch}(t)dt$		

On peut transformer l'intégrale en

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\text{argsh}(1)} \sqrt{1 + \text{sh}(t)^2} \text{ch}(t) dt = \int_0^{\text{argsh}(1)} \sqrt{\text{ch}(t)^2} \text{ch}(t) dt = \int_0^{\text{argsh}(1)} |\text{ch}(t)| \text{ch}(t) dt \\
 &= \int_0^{\text{argsh}(1)} \text{ch}^2(t) dt = \int_0^{\text{argsh}(1)} \frac{1 + \text{ch}(2t)}{2} dt \\
 &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\text{sh}(2t)}{4} \right]_0^{\text{argsh}(1)} = \frac{\text{argsh}(1)}{2} + \frac{\text{sh}(2\text{argsh}(1))}{4} \\
 &= \frac{\text{argsh}(1)}{2} + \frac{\text{sh}(\text{argsh}(1)) \text{ch}(\text{argsh}(1))}{2} \\
 &= \frac{\text{argsh}(1)}{2} + \frac{\text{ch}(\text{argsh}(1))^2}{2} \\
 &= \frac{\text{argsh}(1)}{2} + \frac{\sqrt{(1 + \text{sh}^2(\text{argsh}(1)))}}{2} = \frac{\text{argsh}(1)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$