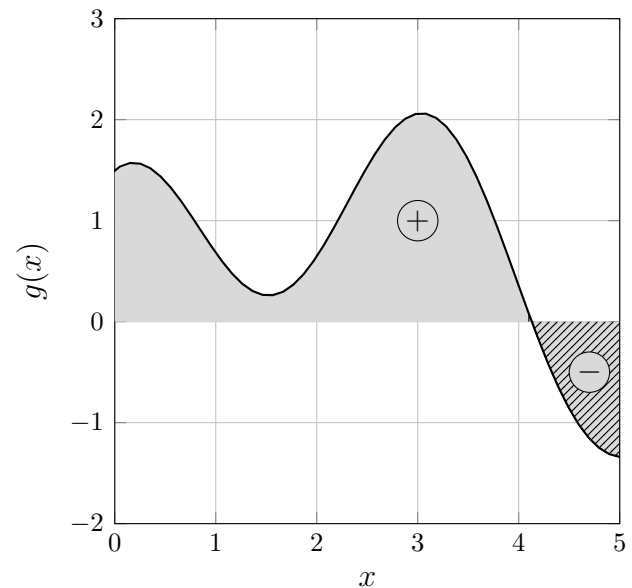
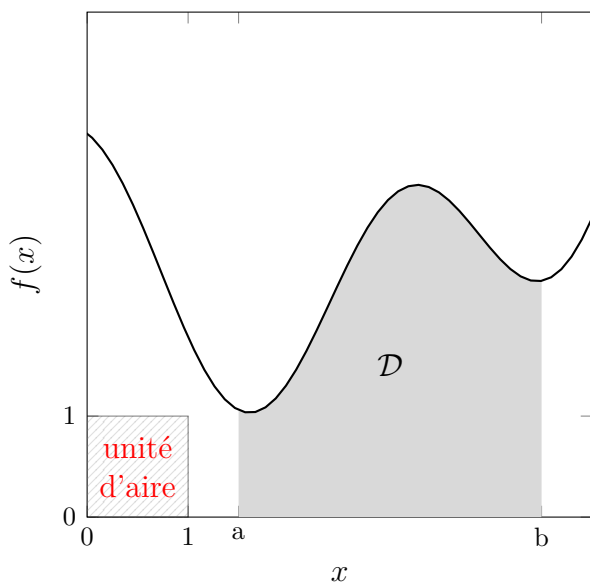


Séance 6 Intégrales simples

1 Intégrale et aire sous la courbe

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Sa représentation graphique est effectuée dans un repère orthonormal et l'unité d'aire est donnée par les vecteurs unitaires du repère.

On cherche à déterminer l'aire du domaine \mathcal{D} situé sous la courbe représentative de f .



Cette aire s'appelle **l'intégrale de la fonction f de a à b** ; on la note $\int_a^b f(x) dx$.

Pour une fonction g continue de signe quelconque sur un intervalle $[a; b]$, l'intégrale de g est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels g garde un signe constant. Sur l'exemple ci-dessus, l'aire en gris est comptée positivement et l'aire hachurée, négativement.

2 Propriétés de l'intégrale

- **Inversion des bornes d'intégration :**

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

- **Valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ est le nombre réel

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

- **Linéarité :** f et g continues sur $[a; b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

- **Relation de Chasles :** Soit f une fonction continue sur $[a; c]$, et soit b un réel de $[a; c]$, alors

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

- **Positivité :** Si $f(x) \geq 0$ et $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b g(x) dx \leq 0$$

- **Relation d'ordre :** Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$ alors

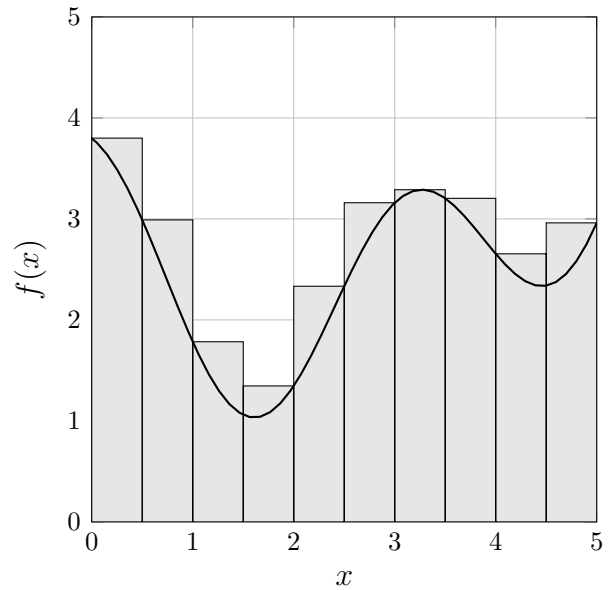
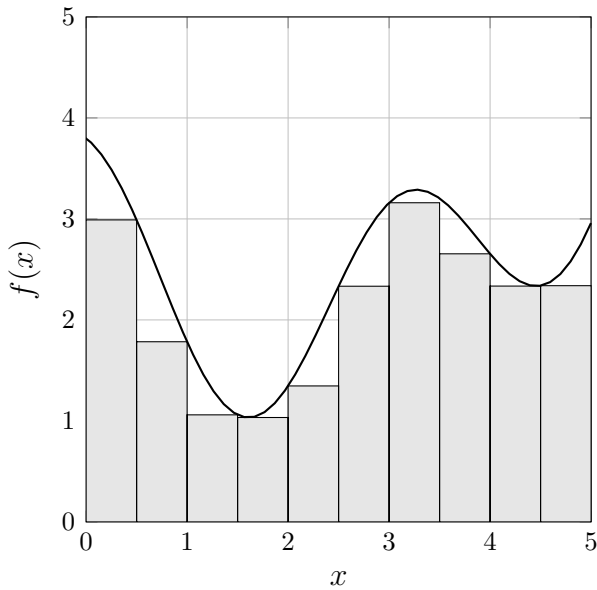
$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

- **Inégalité de la moyenne** Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, avec $a < b$, telle que, pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors

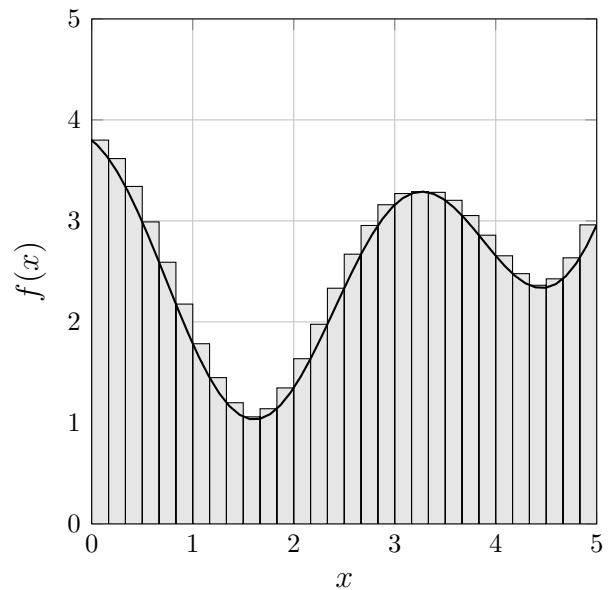
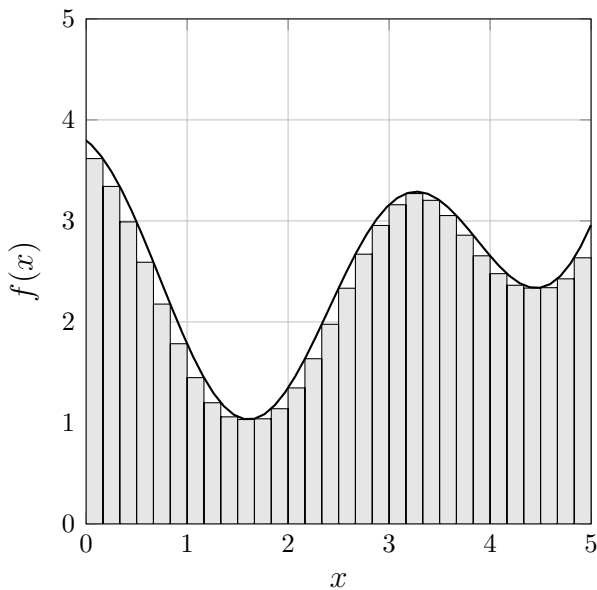
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

3 Approximation de l'aire sous la courbe: sommes de Riemann

L'idée directrice est d'approcher la courbe par une fonction constante par morceaux. En ajoutant les surfaces des rectangles, on estime l'aire sous la courbe. Ici, les valeurs choisies pour approcher la courbe sont les valeurs minimales sur un intervalle (figures de gauche) et la valeur maximale de la courbe (figures de droite). L'aire de la courbe est supérieure ou égale à l'estimation par les rectangles inférieurs (à gauche) et inférieure ou égale à l'estimation par les rectangles supérieurs (à droite).



En augmentant le nombre de rectangles dans l'intervalle, on obtient une description plus précise de la courbe. On obtient une meilleure approximation de l'aire de la courbe.



Cette technique peut-être utilisée pour calculer **numériquement** l'intégrale d'une fonction compliquée lorsque l'intégration analytique n'est pas possible.

4 Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f .

Les primitives sont définies à une constante près. Il y en a donc une infinité.

Exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x + 2$. Les fonctions définies sur \mathbb{R} par $F(x) = 2x^2 + 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ sont des primitives de f sur \mathbb{R} : $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.
Pour déterminer une primitive unique, il faut fixer une condition (donner la valeur de la fonction en un point), par exemple $F(x_0) = y_0$.

4.1 Lien entre intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et $a \in I$. Alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(u)du \quad \text{est l'unique primitive de } f \text{ sur } I \text{ s'annulant en } a.$$

4.2 Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Ensemble de définition
FONCTIONS SIMPLES		
k	$kx + C$	\mathbb{R}
$ax + b$	$ax^2/2 + bx + C$	\mathbb{R}
$1/x$	$\ln(x) + C = \ln(kX), k \in \mathbb{R}^+$	\mathbb{R}_+^*
\sqrt{x}	$2x^{3/2}/3 + C$	\mathbb{R}_+^*
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	\mathbb{R} si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ \mathbb{R}^* si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ \mathbb{R}_+^* si $\alpha \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + C$	\mathbb{R}_+^*
e^x	e^x	\mathbb{R}
FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES		
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	\mathbb{R}
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x)) + C$	$] -\pi/2, \pi/2[$
$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x) + C$	$] -1, 1[$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x) + C$	$] -1, 1[$
$1/1+x^2$	$\arctan(x)$	\mathbb{R}
FONCTIONS HYPERBOLIQUES		
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	\mathbb{R}
$\text{sh}(x)$	$\text{cosh}(x)$	\mathbb{R}
$\text{th}(x)$	$\ln(\text{ch}(x)) + C$	\mathbb{R}
$1/\sqrt{x^2+1}$	$\text{argsh}(x)$	$] -1, 1[$
$1/\sqrt{x^2-1}$	$\text{argch}(x)$	\mathbb{R}
$1/1-x^2$	$\text{argth}(x)$	\mathbb{R}

5 Opérations composées usuelles

Opération	Fonction f	Primitive F
Puissance	$f' f^n$	$\frac{f^{n+1}}{n+1} + C$
Inverse	$\frac{f'}{f^2}$	$-\frac{1}{f} + C$
Racine	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f} + C$
Exponentielle	$f' e^f$	$e^f + C$
Logarithme	$\frac{f'}{f}$	$\ln(f) + C$
Composée	$f' \times g' \circ f$	$g \circ f$