Séance 5 Diagonalisation

1 Recherche des valeurs propres

Soit A une matrice diagonalisable de taille $n \times n$. A possède n valeurs propres notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique de A,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \quad \text{i.e. les solutions de} \quad \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Attention toutes les matrices ne sont pas diagonalisables.
Exemple,
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A.

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 6-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}^{L1:=L_1+L_2+L_3} \tag{1}$$

$$= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & 3 & -7-\lambda \end{vmatrix}^{C3:=C_3-C_1} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -3 & -7-\lambda \end{vmatrix}^{C2:=C_2-C_1} \tag{2}$$

$$= (6-\lambda)(-1-\lambda)(-7-\lambda) \tag{3}$$

Les solutions de $\det(A - \lambda I_3) = (6-\lambda)(-\lambda)(-7-\lambda) = 0$ correspondent à $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 6$.

2 Recherche des vecteurs propres

Les vecteurs propres de A sont les vecteurs dont la direction est conservée par l'application de la matrice A. Les vecteurs propres sont associés à une valeur propre λ.

$$\text{Soit} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X \text{ est un vecteur propre si} \quad AX = \lambda X \quad \left(\text{noté aussi } (A - \lambda I_n)X = 0\right)$$

Exemple : Cherchons les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

- Vecteur propre X_1 associé à la valeur propre $\lambda_1 = -7$
Étape 1 : Calcul de $A - \lambda I$

$$(A-(-7)I_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} - (-7)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Recherche du vecteur propre

$$(A-(-7)I_3)X_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Ici on se rend compte que les lignes sont liées (il existe une combinaison linéaire des lignes entre elles, par exemple $11L_3 - 2L_2 - 15L_1 \iff 0 = 0$, on le savait car le déterminant de $A-(-7)I_3$ est nul. On va alors essayer d'exprimer deux coefficients en fonction du troisième, en ne conservant que deux équations libres du système, par exemple les lignes 2 et 3,

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \underset{L1:=2L_1-L_2}{\iff} \begin{cases} 15x_2 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

Finalement on peut exprimer $X_1 = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on peut choisir n'importe quelle valeur pour x_3,

prenons par exemple $x_3 = -1$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Vecteur propre X_2 associé à la valeur propre $\lambda_2 = -1$
Étape 1 : Calcul de $A - \lambda I$

$$(A-(-1)I_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Recherche du vecteur propre

$$(A-(-1)I_3)X_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Ici on se rend compte que les lignes sont liées (il existe une combinaison linéaire des lignes entre elles, par exemple $3L_1 + 3L_3 - 4L_2 \iff 0 = 0$, on le savait car le déterminant de $A -$

$(-1)I_3$ est nul. On va alors essayer d'exprimer deux coefficients en fonction du troisième, en ne conservant que deux équations libres du système, par exemple les lignes 1 et 3,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = -2x_1 \end{cases}$$

Finalement on peut exprimer $X_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ on peut choisir n'importe quelle valeur pour x_1, prenons par exemple $x_1 = 1$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Vecteur propre X_3 associé à la valeur propre $\lambda_2 = 6$
  Étape 1 : Calcul de $A - \lambda I$

$$(A - 6I_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Recherche du vecteur propre

$$(A - 6I_3)X_3 = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 3 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -9x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Ici on se rend compte que les lignes sont liées (il existe une combinaison linéaire des lignes entre elles, par exemple $L_1 + L_2 + L_3 \iff 0 = 0$, on le savait car le déterminant de $A - 6I_3$ est nul. On va alors essayer d'exprimer deux coefficients en fonction du troisième, en ne conservant que deux équations libres du système, par exemple les lignes 1 et 2,

$$\begin{cases} -9x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \underset{L1:=L_1+3L_2}{\iff} \begin{cases} -11x_2 + 13x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 11/13x_2 \\ x_1 = 19/39x_2 \end{cases}$$

Finalement on peut exprimer $X_3 = x_2 \begin{pmatrix} 19/39 \\ 1 \\ 11/13 \end{pmatrix}$ on peut choisir n'importe quelle valeur pour x_2, prenons par exemple $x_2 = 39$, $X_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ 39 \\ 33 \end{pmatrix}$

3 Matrice diagonale

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ les vecteurs propres de la matrice A. La matrice de passage de la base dans laquelle A est diagonale vers la base originale est notée P.

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_1 & X_2 & & X_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour l'exemple précédent, la matrice de passage s'écrit :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ X_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ 39 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 19 \\ 0 & -2 & 39 \\ -1 & 1 & 33 \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse,

$$P^{-1} = \frac{-1}{182} \begin{pmatrix} -105 & -14 & 77 \\ -39 & 52 & -39 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/26 & 1/13 & -11/26 \\ 3/14 & -2/7 & 3/14 \\ 1/91 & 1/91 & 1/91 \end{pmatrix}$$

La matrice A peut s'écrire sous forme diagonale en passant de la base initiale à la base propre,

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec} \quad D = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

4 Puissance d'une matrice diagonale

La diagonalisation est une méthode intéressante pour bien comprendre le comportement d'un endomorphisme linéaire.

La diagonalisation est aussi intéressante pour calculer les puissances d'une matrice.

Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable telle que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors} \quad \begin{aligned} A^k &= \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{k \text{ fois}} \\ &= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots \times (PDP^{-1})}_{k \text{ fois}} \\ &= \underbrace{PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \cdots \times (P^{-1}P)DP^{-1}}_{k \text{ fois}} \\ &= P\underbrace{D \cdots D}_{k \text{ fois}}P^{-1} \quad \text{car} \quad P^{-1}P = I_n \quad \text{et} \quad DI_n = D. \\ &= PD^kP^{-1} \end{aligned}$$

Les puissances d'une matrice diagonale s'expriment facilement,

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Exemple : on peut calculer les puissances de la matrice A^4,

$$A^4 = PD^4P^{-1} \quad \text{avec} \quad D^4 = \begin{pmatrix} 2401 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1296 \end{pmatrix}$$

$$PD^4 = \begin{pmatrix} 2401 & 1 & 24624 \\ 0 & -2 & 50544 \\ -2401 & 1 & 42768 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1656 & 455 & -745 \\ 555 & 556 & 555 \\ -915 & 285 & 1486 \end{pmatrix}$$