Séance 4 Changement de base

1 Base d'un espace vectoriel

Une base d'un espace vectoriel est une famille de vecteurs de cet espace vectoriel étant :

1. **Génératrice**. On peut par combinaison linéaire des vecteurs de la base créer tous les vecteurs de l'espace vectoriel.
2. **Libre**. Aucun vecteur de la famille ne peut être obtenu par combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Dans un espace vectoriel de dimension n, une base est composée de n vecteurs. Pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base, il suffit de montrer qu'elle comporte n éléments et que cette famille est libre.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Pour montrer qu'une famille de n vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n)$ est une base, il suffit de montrer que la seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est celle à coefficients nuls,

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \cdots + k_n\vec{u}_n = \vec{0} \Longrightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

S'il existe une combinaison linéaire à coefficients non nuls donnant le vecteur nul alors la famille n'est pas une base.

2 Matrice de passage

La matrice de passage, notée P, de la base 1 à la base 0 est simplement le tableau formé par les coefficients des vecteurs de la base 1 dans la base 0 écrits verticalement.

Soit une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n)$ formant la base 0. Soit une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n)$ formant la base 1 et dont les expressions dans la base 0 sont :

$$\begin{cases} \vec{v}_1 & = p1,1\vec{u}_1 + p2,1\vec{u}_2 + \cdots + pn,1\vec{u}_n \\ \vec{v}_2 & = p1,2\vec{u}_1 + p2,2\vec{u}_2 + \cdots + pn,2\vec{u}_n \\ \vdots & \\ \vec{v}_n & = p1,n\vec{u}_1 + p2,n\vec{u}_2 + \cdots + pn,n\vec{u}_n \end{cases} \quad \text{en vertical } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} p1,1 \\ p2,1 \\ \vdots \\ pn,1 \end{pmatrix}_0 ; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} p1,2 \\ p2,2 \\ \vdots \\ pn,2 \end{pmatrix}_0 \cdots \vec{v}_n = \begin{pmatrix} p1,n \\ p2,n \\ \vdots \\ pn,n \end{pmatrix}_0$$

La matrice de passage P s'écrit :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & \vec{v}_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \\ \vec{u}_n \end{array}$$

2.1 Condition de liberté de la famille de vecteur avec la matrice de passage

Une famille est une base si le déterminant de sa matrice de passage est non nul, $\det(P) \neq 0$.

2.2 Matrice de passage inverse

Le passage de la base 1 vers la base 0 est donné par la matrice de passage P. Le passage de la base 0 vers la base 1 est donné par la matrice inverse P^{-1}.

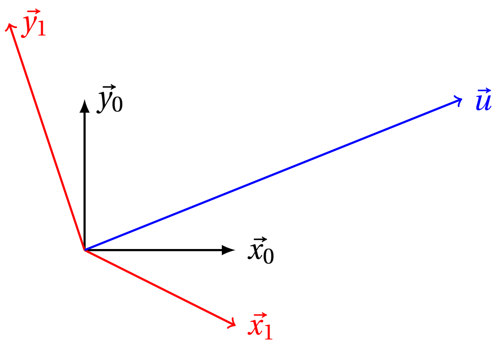
$$\begin{tikzcd} \text{Base } 1 \arrow[rr, bend left, "P"] & & \text{Base } 0 \arrow[ll, bend left, "P^{-1}"] \end{tikzcd}$$

La matrice de passage inverse se calcule avec la formule :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \left(\text{com}(P)\right)^T$$

2.3 Exemple en dimension 2

On considère la base 0 et la base 1 suivantes :



avec les projections $\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{x}_1 & = & \vec{x}_0 - 1/2\vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 & = & -1/2\vec{x}_0 + 3/2\vec{y}_0 \end{array} \right.$

Le vecteur $\vec{u}$ s'exprime dans la base 0, $\vec{u} = 5/2\vec{x}_0 + \vec{y}_0$. On veut trouver son expression dans la base 1.

- **Étape 1 :** on écrit les vecteurs de manière verticale et on forme la matrice de passage.
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}_0 \quad \text{et} \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}_0 \text{ d'où la matrice de passage, } P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$
- **Étape 2 :** On calcule la matrice de passage inverse pour passer de la base 0 vers la base 1. On calcule le déterminant et la co-matrice de la matrice de passage P nécessaires pour calculer la matrice inverse,
$$\det(P) = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \text{com}(P) = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\left(\text{com}(P)\right)^T = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$
- **Étape 3 :** On applique la matrice de passage P^{-1} au vecteur $\vec{u}$ écrit verticalement.
$$\vec{u}_{/0} = 5/2\vec{x}_0 + \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{on trouve} \quad \vec{u}_{/1} = P^{-1}\vec{u}_{/0} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 17/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}_1$$

On peut donc en déduire l'expression de $\vec{u}$ dans la base 1 :
$$\vec{u} = \frac{17}{5}\vec{x}_1 + \frac{9}{5}\vec{y}_1$$