Séance 2 Déterminants

1 Déterminant d'une matrice 2×2

Soit A une matrice 2×2, le déterminant de A est le produit croisé de ses coefficients,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{le déterminant s'écrit} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2 Déterminant d'une matrice carrée $n \times n$

2.1 Mineur

Soit A une matrice $n \times n$. Le mineur $m_{i,j}$ de A est le déterminant de la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

On enlève la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A :

$$\begin{array}{ccc} & j^{\text{ème}} \text{ colonne} & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & i^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{array}$$

On en déduit le mineur,

$$m_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Mineur en position (1,1) :

$$\begin{array}{ll} & \text{1}^{\text{ère}}\text{ colonne} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \ \text{1}^{\text{ère}}\text{ ligne} \end{array} \implies m_{1,1} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 4\sqrt{3}$$

Mineur en position (2,2) :

$$\begin{array}{ll} & \text{2}^{\text{ème}}\text{ colonne} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \ \text{2}^{\text{ème}}\text{ ligne} \end{array} \implies m_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \pi & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} - \pi$$

Mineur en position (3,1) :

$$\begin{array}{ll} & \text{1}^{\text{ère}}\text{ colonne} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \ \text{3}^{\text{ème}}\text{ ligne} \end{array} \implies m_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

2.2 cofacteur

Le cofacteur est s'exprime simplement à partir du mineur, $c_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$.
En reprenant l'exemple précédent, on peut facilement donner les cofacteurs :

- $c_{1,1} = (-1)^{1+1} m_{1,1} = (-1)^2 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $c_{2,2} = (-1)^{2+2} m_{2,2} = (-1)^4 (\sqrt{3} - \pi) = (\sqrt{3} - \pi)$
- $c_{3,1} = (-1)^{3+1} m_{3,1} = (-1)^4 (-4) = -4$

Pour aller plus vite, on peut utiliser la matrice des signes de co-facteurs, en commençant avec un plus en haut à gauche et en alternant les signes. La matrice 3×3 des signes s'écrit

$$S_3 = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer rapidement le cofacteur, toujours avec la matrice A,
Cofacteur en position $(1,2)$:

$$S_3 = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{array}{c} 2^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{array} \; 1^{\text{ère}} \text{ ligne} \qquad \Longrightarrow \quad c_{1,2} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \pi & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -2\sqrt{3}$$

Cofacteur en position $(2,3)$:

$$S_3 = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{array}{c} 3^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{array} \; 2^{\text{ème}} \text{ ligne} \qquad \Longrightarrow \quad c_{2,3} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \pi & 0 \end{vmatrix} = 2\pi$$

Cofacteur en position $(3,3)$:

$$S_3 = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{array}{c} 3^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{array} \; 3^{\text{ème}} \text{ ligne} \qquad \Longrightarrow \quad c_{3,3} = (+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

2.3 Expression du déterminant avec les cofacteurs

Pour les matrices plus grandes que les matrices 2×2, le déterminant est calculé en développant selon une ligne ou une colonne à l'aide des cofacteurs $c_{i,j}$.
En développant sur la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_{i,j}$$

En développant sur la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_{i,j}$$

2.4 Comatrice

La comatrice est la matrice des cofacteurs. La comatrice d'une matrice A est notée $\text{com}(A)$.

Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, on peut calculer un à un chacun des cofacteurs puis les replacer dans la comatrice. On obtient

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & -4\pi \\ -2\sqrt{3} & \sqrt{3}-\pi & 2\pi \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Déterminant d'une matrice 3×3

On peut calculer le déterminant d'une matrice 3×3 en développant le déterminant selon une ligne ou une colonne.

On considère la matrice quelconque $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et la matrice de signes $S_3 = \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$.

On peut développer le déterminant par rapport à la première ligne,

$$\det(A) = (+1) \times a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1) \times b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (+1) \times c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

4 Propriétés des déterminants

- l'addition ne fonctionne pas : $\det(A+B)$ est différent de $\det(A)$+$\det(B)$
- $\det(A^{\mathrm{T}})$=det(A)
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(kA) = k^2 \det(A)$ si A est une matrice 2×2. En toute généralité, si A est une matrice $n \times n$, $\det(kA) = k^n \det(A)$.
- Le déterminant est inchangé si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire d'autres colonnes du déterminant.
  Par exemple,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2b & b \\ c-2d & d \end{vmatrix} = (a-2b)d - (c-2d)b = ad - bc$$

- Le déterminant est inchangé si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes du déterminant.
  Par exemple,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c-3a & d-3b \end{vmatrix} = a(d-3b)-(c-3a)b = ad-bc$$

- Dans un déterminant s'il existe un facteur commun dans une ligne ou une colonne , on peut le factoriser, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ 5c & 5d \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 6 = 12$$

- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments de sa diagonale principale.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\times 5\times 9 = 45 \quad ; \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 5\times 1 = 5$$

5 Calcul de déterminant

On peut utiliser certaines règles de calcul utiles pour simplifier le déterminant à calculer.

- si on échange deux colonnes d'une matrice, le déterminant se change en son opposé;
- on ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un de ses vecteurs colonnes, une combinaison linéaire des *autres* vecteurs colonnes;
  Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -5+x & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x+2 & x+2 \\ -1-\frac{x}{2} & x & 2 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{2} & -5+x & 7 \end{vmatrix}^{C_1:=C_1-C_2/2} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & \frac{11}{2} \end{vmatrix}^{C_3:=C_3-C_2/2}$$

- on ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice en ajoutant à l'une de ses lignes, une combinaison linéaire des *autres* lignes;
  Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -5+x & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & -5+x & 7 \end{vmatrix}^{L_1:=L_1+L_2} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}^{L_1:=L_1-4L_2}$$

- le déterminant d'une matrice est nul si l'un des vecteurs colonnes est nul, ou si l'un des vecteurs colonnes est combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes.
  Exemple : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & x & 2 \\ 1 & -5+x & 7 \end{vmatrix} = 0$ car la somme des colonnes 2 et 3 est égale (x+2) fois la colonne 1 ($C_2+C_3 = (x+2)C_1$).
- le déterminant d'une matrice est nul si l'un des vecteurs lignes est nul, ou si l'un des vecteurs lignes est combinaison linéaire des autres vecteurs lignes.
  Exemple :
  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0$ car la ligne 2 est égale à 3 fois la ligne 1 ($L_2 = 3L_1$).