Séance 1 Calcul matriciel

1 Matrices

1.1 Définition

Une **matrice** de taille $n \times p$ est un tableau de nombres formé de n lignes et p colonnes.

$$\begin{array}{cc} \overset{p \text{ colonnes}}{\longleftrightarrow} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & p \\ 2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ n & & & & \end{pmatrix} & \updownarrow n \text{ lignes} \end{array}$$

Une matrice A s'écrit $A = (a_{i,j})$ où i désigne le numéro de ligne ($1 \leq i \leq n$) et j le numéro de colonne ($1 \leq j \leq p$). Le coefficient $a_{i,j}$ correspond au coefficient situé à la $i^{\text{ème}}$ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

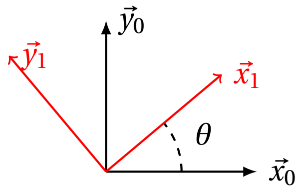
Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3. Il faut bien faire attention à ne pas confondre ligne et colonne, pour la matrice A, $a_{1,2} = -2$ et $a_{2,1} = 6$.

1.2 Exemples d'utilisation du calcul matriciel en mécanique

Les matrices sont des objets mathématiques utiles pour écrire un système linéaire de manière synthétique,

$$\begin{cases} 2x + 3y & = & 3 \\ x - y & = & 0 \end{cases} \quad \text{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elles permettent aussi de changer de la base 0 à la base 1 facilement avec une rotation d'angle θ,



$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{x}_1 & = & \cos(\theta)\vec{x}_0+\sin(\theta)\vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 & = & -\sin(\theta)\vec{x}_0+\cos(\theta)\vec{y}_0 \end{array}\right. \quad \text{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_1 = R\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}_0$$

où $R=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation d'angle θ. Les coordonnées d'un point $X=(x_0,y_0)_0$ dans la base 0 sont exprimées dans la base 1 $X=(x_1,y_1)_1$ par application de la matrice de rotation R.

2 Addition, soustraction et multiplication par un réel

2.1 Addition

La somme des matrices A et B est la matrice obtenue en additionnant deux à deux les coefficients qui occupent la même position dans chaque matrice.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_4+b_4 & a_5+b_5 & a_6+b_6 \\ a_7+b_7 & a_8+b_8 & a_9+b_9 \end{pmatrix}$$

Prenons un exemple concret,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 6 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+4 & 2+7 & 3+(-2) \\ 12+(-3) & 5+2 & 6+0 \\ (-3)+4 & 5+1 & 9+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 9 & 7 & 6 \\ 1 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

2.2 Multiplication par un réel

Le produit d'une matrice A par un nombre réel k est la matrice notée kA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k.

$$kA=k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ ka_4 & ka_5 & ka_6 \\ ka_7 & ka_8 & ka_9 \end{pmatrix}$$

Exemple,

$$8\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8\times 1 & 8\times 2 & 8\times 3 \\ 8\times 4 & 8\times 5 & 8\times 6 \\ 8\times 7 & 8\times 8 & 8\times 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 16 & 24 \\ 32 & 40 & 48 \\ 56 & 64 & 72 \end{pmatrix}$$

2.3 Soustraction

La soustraction d'une matrice A avec une matrice B est simplement la combinaison d'une addition et de la multiplication avec un réel $A+(-1)B$. On l'obtient en soustrayant deux à deux les coefficients qui occupent la même position dans chaque matrice.

$$A+(-1)B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -b_4 & -b_5 & -b_6 \\ -b_7 & -b_8 & -b_9 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ a_4-b_4 & a_5-b_5 & a_6-b_6 \\ a_7-b_7 & a_8-b_8 & a_9-b_9 \end{pmatrix} \tag{3}$$

3 Les matrices carrées

3.1 Définition

Une matrice carrée de taille n est une matrice formée de n lignes et n colonnes.

Exemple : $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2×2

Une matrice carré d'ordre n est dite symétrique lorsque ses coefficients de part et d'autre de la diagonale sont égaux deux-à-deux.

Exemple : $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique de taille 3.

3.2 Matrice carrées remarquables

3.2.1 Matrice diagonale

Une matrice carré d'ordre n est diagonale lorsque tous les coefficients situés hors de la diagonale principale sont nuls.

Par exemple la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonale.

Les matrices $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \pi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas diagonales.

3.2.2 Matrices triangulaires

Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée dont les valeurs en dessous la diagonale principale sont nulles.

$$T_{sup} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{exemple} \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée dont les valeurs au dessus de la diagonale principale sont nulles.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{exemple} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 5 & \pi & \pi^2 \end{pmatrix}$$

3.2.3 Matrice identité

La matrice identité, I_{n} est une matrice diagonale de taille $n \times n$ n'ayant que des 1 sur sa diagonale.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour les matrices } 2 \times 2 \quad ; \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour les matrices } 4 \times 4$$

3.2.4 Matrice nulle

La matrice nulle de taille n est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note O_n.

3.3 Transposition d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée. La transposée A^{T} de cette matrice s'obtient par symétrie axiale par rapport à la diagonale principale de la matrice. Les coefficients sont échangés entre lignes et colonnes, $a_{ij}^{\mathrm{T}} = a_{ji}$.

La transposée de la transposée $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ est la matrice A d'origine.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & x & 3 \\ 4 & 2 & y \\ 0,1 & 8 & \pi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0,1 \\ x & 2 & 8 \\ 3 & y & \pi \end{pmatrix}$$

4 Multiplication matricielle

4.1 Multiplication élémentaire d'un vecteur ligne et d'un vecteur colonne

On considère ici un vecteur ligne $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \ddots & l_n \end{pmatrix}$ et un vecteur colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ composé de n éléments. Le produit $L \times C$ est un nombre, un scalaire. Il est défini comme,

$$L \times C = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = l_1 \times c_1 + l_2 \times c_2 + \cdots + l_n \times c_n = \sum_{k=1}^{n} l_k c_k$$

Attention, Pour que le produit $L \times C$ soit correctement défini, le vecteur L doit avoir autant d'éléments que le vecteur C.

En dimension 2 et en dimension 3, le produit de deux vecteur est bien connu, c'est le produit scalaire.

Exemple :

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad L \times C = 4 \times 5 + 3 \times (-3) + (-l) \times (-2) = 13.$$

4.2 Multiplication de 2 matrices carrées

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$. Le produit des matrices A et B, noté AB, est une matrice carrée de taille $n \times n$. Les éléments de la matrice AB (notés c_{ij}) sont le produit du vecteur la $i^{\text{ème}}$ ligne de A avec la $j^{\text{ième}}$ colonne de B.

$$c_{i,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Méthode de calcul matriciel. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule coefficient par coefficient,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 3\times 4 + (-1)\times(-2) & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2\times 0 + 3\times 1 + (-1)\times 3 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 2\times 1 + 3\times 1 + (-1)\times 2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 1\times 1 + 5\times 4 + 0\times(-2) & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & & \\ & & \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 1\times 0 + 5\times 1 + 0\times 3 & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & \\ & & \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 1\times 1 + 5\times 1 + 0\times 2 \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 6 \\ & & \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 6 \\ x\times 1 + 0\times 4 + 1\times(-2) & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 6 \\ x-2 & & \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 6 \\ x-2 & x\times 0 + 0\times 1 + 1\times 3 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 6 \\ x-2 & 3 & \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 6 \\ x-2 & 3 & x\times 1 + 0\times 1 + 1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 6 \\ x-2 & 3 & x+2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

On obtient, $AB = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 3 \\ 21 & 5 & 6 \\ x-2 & 3 & x+2 \end{pmatrix}$. De la même manière, vérifiez que $BA = \begin{pmatrix} x+2 & 3 & 0 \\ x+9 & 17 & -3 \\ 2x-1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

En général AB est différent de BA. Le produit matriciel **n'est pas commutatif**.

Autres propriétés des multiplications matricielles

Soient A, B et C trois matrices carrées $n \times n$,

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- **Distributivité à gauche :** $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- **Distributivité à droite :** $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- **Commutation avec la matrice identité** $I_n \times A = A \times I_n = A$

4.3 Puissance d'une matrice carrée

On considère A une matrice carrée $n \times n$ et k un entier relatif non nul. La **puissance** $k^{\text{ième}}$ de A, notée A^k est définie par :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{k\ fois}$$

Par convention, $A^0 = I_n$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Calculons A^2.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 5 \times 0 & 1 \times 5 + 5 \times 6 \\ 0 \times 1 + 6 \times 0 & 0 \times 5 + 6 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

Calculons A^3.

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 35 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 35 \times 0 & 1 \times 5 + 35 \times 6 \\ 0 \times 1 + 36 \times 0 & 0 \times 5 + 36 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 215 \\ 0 & 216 \end{pmatrix}$$

4.4 Puissance d'une matrice diagonale

Soit une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

A^k est une matrice diagonale où les éléments diagonaux ont été élevés à la puissance k,

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.5 Binôme de Newton pour les matrices

On ne peut pas appliquer brutalement la formule du binôme de Newton pour les matrices car leur produit n'est *en général* pas commutatif ($AB \neq BA$). On peut appliquer le binôme de Newton avec la matrice identité et A une matrice carrée de dimension $n \times n$,

$$(A+I_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i$$

On rappelle les coefficients binomiaux :

$$\frac{k!}{i!(k-i)!} = \binom{k}{i} \quad \text{avec} \quad k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$$