Prérequis 2 Étude de fonctions

L'étude d'une fonction consiste à déterminer :

1. **La continuité de la fonction**. Déterminer les points de discontinuité de la fonction. Donner les valeurs ou les limites de la fonction à gauche et à droite des points de discontinuité.
2. **Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction**. Pour les fonctions simples, l'ensemble de dérivabilité est généralement le même que celui de continuité. Attention néanmoins car ce n'est pas toujours le cas.
3. **Déterminer le signe de la fonction dérivée.** Trouver les zéros de la dérivée et déterminer le signe de la fonction entre 2 zéros consécutifs. Si la dérivée est positive sur un intervalle, la fonction est croissante sur cet intervalle. Au contraire, si la dérivée est négative, la fonction est décroissante.
4. **Donner les variations de la fonction dans un tableau de variation**. Calculer les valeurs de la fonctions sur les points d'inflexion, les maximums et les minimums locaux (là où la dérivée est nulle).

1 Continuité d'une fonction

En règle générale, la continuité est une notion intuitive, elle correspond au fait de pouvoir dessiner la fonction *sans lever le stylo*. A chaque fois que l'on lève le stylo, on repère en réalité un point de discontinuité.
Exemples :

- La fonction $f(x) = 1/x$ est discontinue en $x = 0$ (elle n'y est d'ailleurs pas définie) et sa limite par la gauche est $-\infty$ et sa limite par la droite $+\infty$.
- La fonction $f(x) = \tan(x)$ est discontinue en $x = \pi/2$ (elle n'y est d'ailleurs pas définie) et sa limite par la gauche est $+\infty$ et sa limite par la droite $-\infty$.
- La fonction de Heaviside ou fonction échelon $f(x) = H(x)$ est discontinue en $x = 0$ (indéfinie) et sa limite par la droite est 0 et sa limite par la gauche 1.

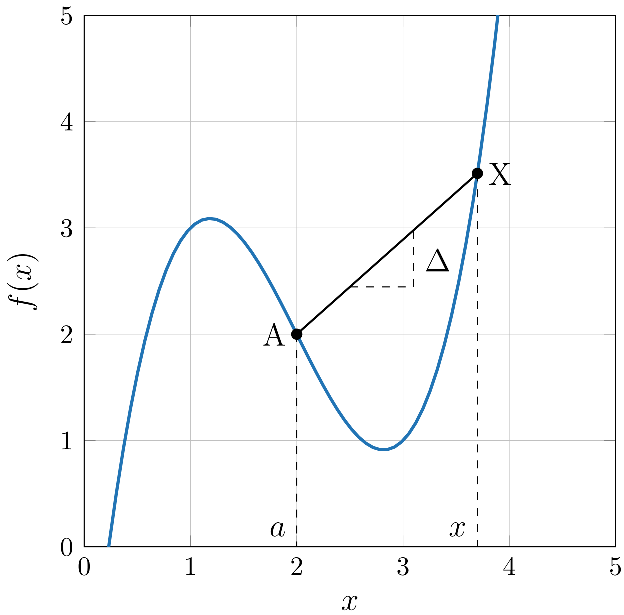
2 Dérivée

2.1 Taux de variation et nombre dérivé en un point

Le taux de variation de la fonction f entre a et x est le quotient

$$\Delta = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Le taux de variation correspond à la pente de la droite reliant les points A d'abscisse (a) et X d'abscisse (x).
Si $\Delta > 0$, il y a eu un accroissement entre A et X. Si $\Delta < 0$, il y a eu un décroissement entre A et X.



Lorsque l'on considère des points A et X très proches (infiniment proches), on peut déterminer le taux d'accroissement local. En écrivant $x = a+h \Rightarrow x-a = h$, le taux d'accroissement s'écrit

$$\Delta = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

La dérivée est simplement la limite de ce taux d'accroissement lorsque $h \to 0$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

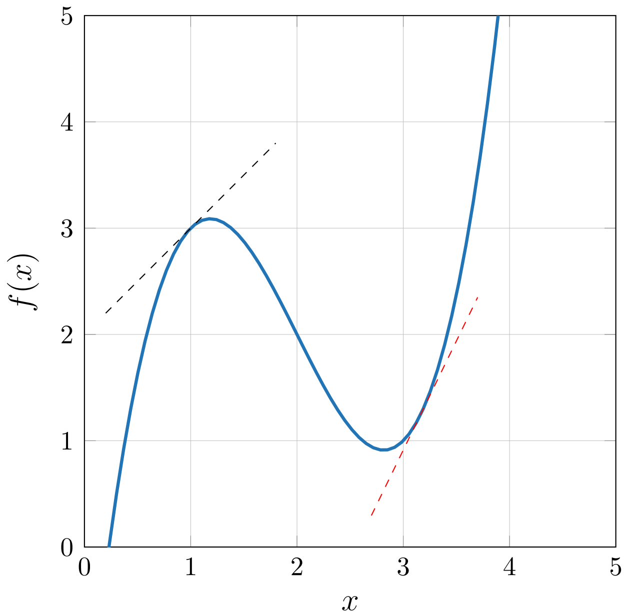
On dit alors que f est dérivable en a et on note cette dérivée $f'(a)$.

Interprétation graphique :

Lorsque h se rapproche de 0, le point X se rapproche du point A.

Ainsi, la droite (AX) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ au point A

$f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.
Ici, à gauche, deux exemples de tangente en pointillés. La dérivée correspond à la pente de la tangente.



Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. le taux de variation de f entre a et $a+h$ est :
$$\Delta = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.$$
2. donc, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} (2a+h) = 2a$.
3. En particulier, $f'(3) = 6$, $f'(0) = 0$ ...

2.2 Dérivées d'opérations élémentaires

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un scalaire	ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'
Multiplication	uv	$u'v+uv'$
Puissance	u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
Division	u/v	$(u'v-uv')/v^2$
Inverse	$1/u$	$-u'/u^2$
Fonction composée	$f \circ g$	$f' \circ g \times g'$

2.3 Dérivées usuelles

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I.

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée	Ensemble de définition
Fonctions simples			
k	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
$1/x$	$\mathbb{R}^*$	$-1/x^2$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$1/2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^α	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$1/x$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
Fonctions trigonométriques			
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$]-\pi/2,\pi/2[$	$1+\tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$	$]-\pi/2,\pi/2[$
$\arccos(x)$	[-1,1]	$-1/\sqrt{1-x^2}$	]-1,1[
$\arcsin(x)$	[-1,1]	$1/\sqrt{1-x^2}$	]-1,1[
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$1/1+x^2$	$\mathbb{R}$
Fonctions hyperboliques			
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1-\mathrm{th}^2(x) = 1/\mathrm{ch}^2(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argsh}(x)$	[-1,1]	$1/\sqrt{x^2+1}$	]-1,1[
$\mathrm{argch}(x)$	$\mathbb{R}$	$1/\sqrt{x^2-1}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argth}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\mathbb{R}$

2.4 Exemples de calculs de dérivées

Calcul de dérivées :

1. $f(x) = x^3 + x + 3$: On utilise la formule $(u+v)' = u' + v'$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 3$.
   On obtient $f'(x) = 3x^2 + 1$.
2. $f(x) = 3(x^2 + 4)$: on utilise la formule $(ku)' = ku'$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^2 + 4$.
   On obtient $f'(x) = 6x$.
3. $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$: On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 5x - 3$.
   On obtient $f'(x) = -20x + 21$.
4. $f(x) = (2x - 7)^2$: on utilise la formule $(u^2)' = 2uu'$ avec $u(x) = 2x - 7$.
   on obtient $f'(x) = 4(2x - 7)$.
5. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+3}$: On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = x^2 + 3$.
   on obtient $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 8x + 9}{(x^2+3)^2}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{-3x+1}$: On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = -3x + 1$.
   on obtient $f'(x) = \dfrac{3}{(-3x+1)^2}$.
7. $f(x) = e^{3x+1}$: On utilise la formule de la composée sachant que $e^u = \exp \circ u$. On a alors $(e^u)' = (\exp \circ u)' = u' \times \exp' \circ u = u'\ e^u$ avec $u(x) = 3x + 1$.
   on obtient $f'(x) = 3\ e^{3x+1}$.
8. $f(x) = ln(-2x + 5)$: On utilise la formule de la composée sachant que $\ln(u) = \ln \circ u$. On a alors $(\ln(u))' = (\ln \circ u)' = u' \times \ln'(u) = u' \times \dfrac{1}{u} = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = -2x + 5$.
   on obtient $f'(x) = \dfrac{-2}{-2x+5}$.
9. $f(x) = \cos(2x + 1)$: On utilise la formule de la composée sachant que $\cos(u) = \cos \circ u$. On a alors $(\cos(u))' = (\cos \circ u)' = u' \times \cos' \circ u = u' \times (-\sin) \circ u = -u' \sin(u)$ avec $u(x) = 2x + 1$.
   on obtient $f'(x) = -2\sin(2x + 1)$.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x - 2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^{2/3}$
- $f(x) = x^{4321}$

2.5 Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable. Lorsque cela est possible, on définit les dérivées successives de f notées :

$$f' \quad , \quad f'' \quad , \quad f''' \quad , \quad f^{(4)} \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(n)}.$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$, calculer f', f'', $f^{(3)}$,$f^{(4)}$,$f^{(5)}$,$f^{(12)}$,

2.6 Notation différentielle

En physique et en mécanique, on utilise la notation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f' \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f''$$

Le d signifie différence infinitésimale. On marque ainsi directement le lien avec les taux de variation.

2.7 Équation de la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La tangente $\mathcal{T}_a$ en a à la courbe C_f a pour équation :

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple, soit $f(x) = x^2 + 2$ de dérivée $f'(x) = 2x$. Les équations des tangentes T_0 en 0 et T_{-1} en -1 sont :
- $T_0 : y = 0 \times (x - 0) + f(0) = 2$ car $f'(0) = 0$.
- $T_{-1} : y = -2 \times (x + 1) + f(-1) = -2x + 1$ car $f'(-1) = -2$.

3 Tableau de variation

Étape 1 : **Domaine de définition, continuité et dérivabilité**
C'est en général une réunion d'intervalles.
Étape 2 : **Parité et symétrie**
Afin de réduire l'intervalle d'étude de la fonction, on recherche des propriétés de parité, de symétrie ou de périodicité.
Étape 3 : **Limites aux bornes des intervalles de définition**
On étudie, en particulier, les limites aux extrémités des intervalles où elle est définie.
Étape 4 : **Calcul de la dérivée et des points d'annulation de la dérivée** ($f'(x) = 0$)
Pour étudier le signe de la dérivée, on cherche d'abord les points d'annulation de la dérivée.
Étape 5 : **Signe de la dérivée**
Calculer la valeur numérique en 1 point entre 2 points d'annulation de la dérivée suffit pour en déduire le signe entre les 2 zéros consécutifs.
Étape 6 : **Variations**
En utilisant le fait que la fonction est croissante si la dérivée est positive et décroissante si la

dérivée est négative, on obtient les maximums et les minimums et, sur chaque intervalle, le sens de variation de la fonction.

Exemple d'un tableau de variation

Considérons la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$:
1. Domaine de définition. Fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction polynomiale.
2. Parité ou symétrie. La fonction n'a pas de parité ou symétrie évidente.
3. Limites. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Dérivée. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$. **Annulation de la dérivée** $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 + 1/\sqrt{3}$ et $x_2 = 1 - 1/\sqrt{3}$. Comme $1 \in [x_1, x_2]$ et $f'(1) = -1$, alors $f'(x) \leq 0$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ et positive ailleurs.
5.Évaluation de la fonction. $f(x_1) = -2/3\sqrt{3}$, $f(x_2) = 2/3\sqrt{3}$. **Zéros de la fonction** $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1\,,\ x = 0$ et $x = 1$

Domaine de définition, zéros de f' et de f	x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	2	$+\infty$
Signe de la dérivée	$f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$
Variation de la fonction f et valeurs remarquables	f	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\searrow$	0	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\nearrow$	0	$+\infty$
Signe de la fonction	$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$