Prérequis 1 Fonctions usuelles

1 Polynômes

On appelle fonction polynôme de degré n toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_p x^p + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

1. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés coefficients de P
2. Le terme $a_p x^p$ est appelé le monôme de degré p
3. $n = \deg(P)$ est le degré du polynôme P.

Exemple :

1. La fonction P définie par $P(x) = 7x^6 - 5x^4 + 3x - 11$ est une fonction polynôme de degré 6.
2. La fonction affine $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 1.
3. La fonction constante $f(x) = 3$ est une fonction polynôme de degré 0.
4. $P = 0$ est le polynôme nul, ce qui signifie que tous ses coefficients sont nuls.
5. La fonction Q définie par : $Q(x) = x^3 + x + \dfrac{1}{x}$ n'est pas une fonction polynôme.

1.1 Égalité de deux polynômes

Soient P et Q deux fonctions polynômes, $P = Q$ signifie que les coefficients des termes de même degré de P et Q sont égaux

Exemples,

1. Les deux polynômes $Q(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ et $P(x) = x^4 + 1$ sont égaux :
$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \\ &= x^4 - \sqrt{2}x^3 + x^2 + \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x + 1 \\ &= x^4 + 1 \\ Q(x) &= P(x) \end{aligned}$$
2. Les polynômes $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ et $R(x) = ax^2 + bx + c$ sont égaux si $a = 2$, $b = -3$ et $c = 4$.

1.2 Racine d'un polynôme

On appelle racine d'une fonction polynôme P toute solution x_0 de l'équation $P(x_0) = 0$. Une fonction polynôme P de degré n à coefficients réels possède **au plus** n racines réelles.
Exemples :

1. Les racines de la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$ sont -3, 1 et 2.
2. Les fonctions polynômes du 1^{er} degré $ax+b$ admettent toutes une seule racine $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.
3. Certaines fonctions polynômes n'ont aucune racine réelle. Par exemple $P(x) = x^2+1$ qui est toujours strictement positive.

1.3 Factorisation

Si une fonction polynôme P à coefficients réels de degré n a une racine réelle x_0 alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x - x_0)$ et on obtient

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) \text{ où } Q \text{ est une fonction polynôme de degré } (n-1)$$

Pour factoriser un polynôme de degré élevé, on utilise la méthode de la racine évidente. On essaye d'évaluer le polynôme en $x = 1$, $x = -1$ et $x = 0\ldots$. Si la valeur du polynôme est 0, on dit qu'on a trouvé une « racine évidente ».

2 Fonction inverse

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

.
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$: La fonction inverse est impaire : sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

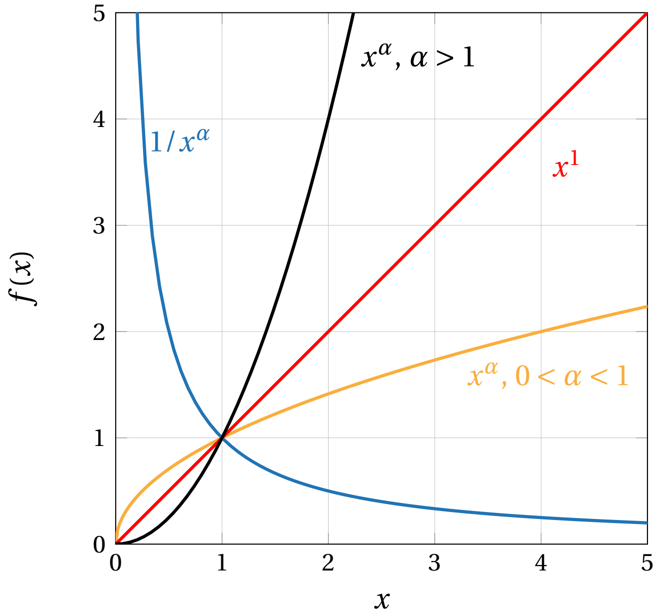
3 Fonctions puissances

Soit α un nombre réel, la fonction puissance α est la fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe

$$f_\alpha(x) = x^\alpha$$

Dans le cas où $\alpha = 1/2$,on obtient la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$.
Dans le cas où $\alpha = 0$, la fonction $f_0(x) = x^0 = 1$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout α, la fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
Allure des courbes représentatives des fonctions puissances :



Sens de variation :
Dans le cas où $\alpha \neq 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ est du signe de α sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 Exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$, e^x étant l'unique nombre réel positif dont le logarithme vaut x.

Remarque :

Les fonctions, exponentielle et logarithme, sont réciproques l'une de l'autre : Pour tous réels x et $y > 0$,

$$y = e^x \iff \ln(y) = x \quad \text{et} \quad \ln\left(e^x\right) = x \quad \text{et} \quad e^{\ln y} = y$$

Graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(y = x)$ dans un repère orthonormal.

Propriétés élémentaires :

- Positivité, $\exp(x) = e^x > 0$
- Nombre d'Euler, $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(e^x)' = e^x$.

Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $e^a / e^b = e^{a-b}$
- $1/e^a = e^{-a}$
- $(e^a)^n = e^{an}$

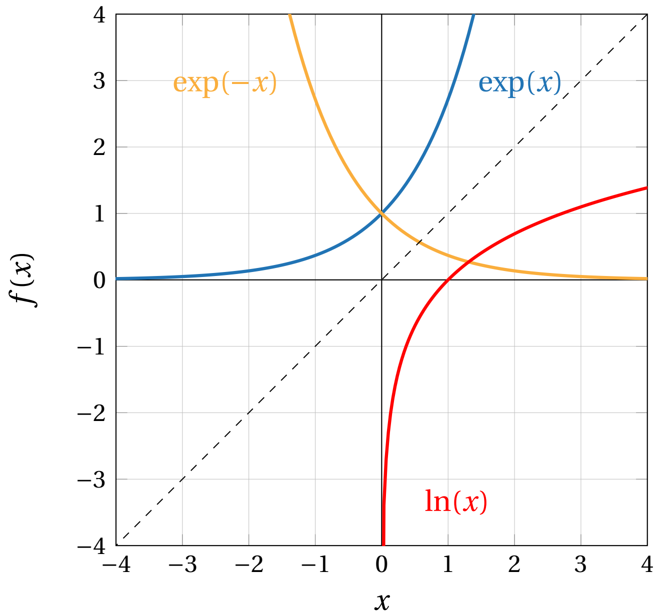
Exemples :

- $e^2 \times e^3 \times \frac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3} = e^{2+3-4+6} = e^7$.
- $e^{x+3} \times e^{2x+1} = e^{(x+3)+(2x+1)} = e^{3x+4}$.
- $(e^{x-2})^2 = e^{2x-4}$.

On a aussi les propriétés sur les limites de la fonction exponentielle :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction exponentielle.



D'où le tableau de variations de la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$:

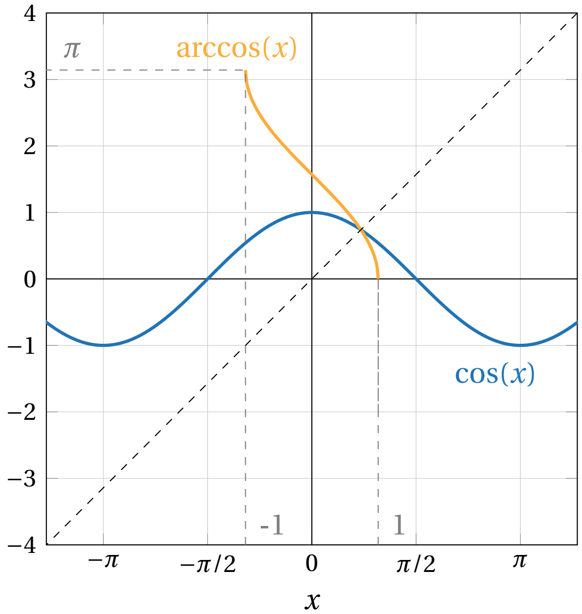
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$		$+$	

5 Fonctions trigonométriques

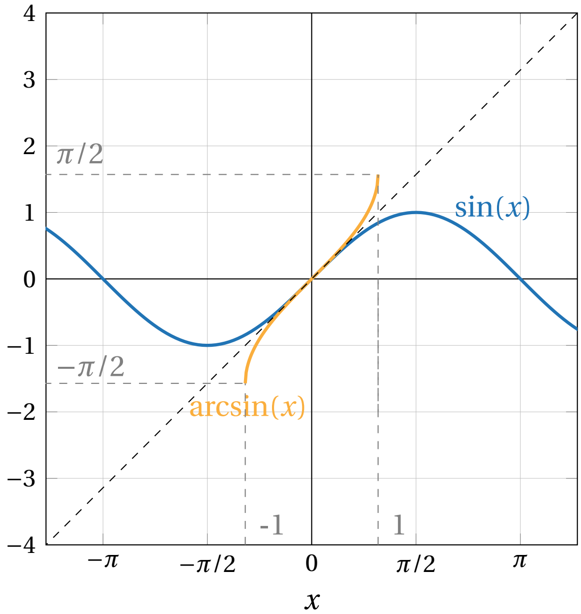
Les fonctions trigonométriques sont sinus, cosinus, tangente et leurs réciproques.

5.1 Représentation graphique

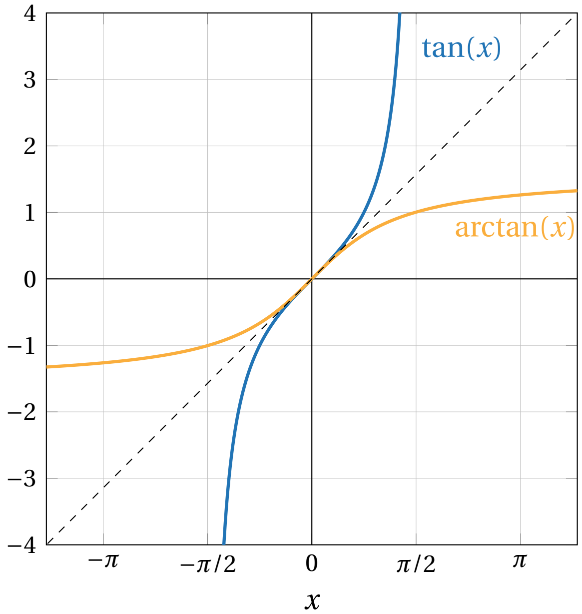
Cosinus, arccosinus



Sinus et arcsinus



Tangente et arctangente



5.2 Propriétés

Périodicité : Une fonction est périodique de période T si pour tout x on a : $f(x+T) = f(x)$. Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. La fonction tangente est périodique de période π.

Dérivées des fonctions trigonométriques

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\tan'(x) = 1/\cos^2(x) = 1 + \tan^2(x)$

Parité :

- Pour tout x, $\cos(-x) = \cos x$: la fonction cosinus est paire.
- Pour tout x, $\sin(-x) = -\sin x$: la fonction sinus est impaire.
- Pour tout x, $\tan(-x) = -\tan x$: la fonction tangente est impaire.

Encadrement : Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

Valeurs remarquables :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	-

5.3 Formules trigonométriques

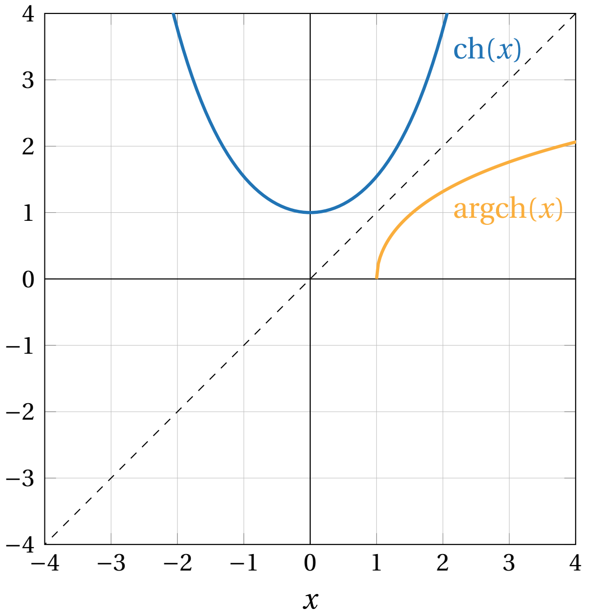
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
- $\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$

6 Fonctions hyperboliques

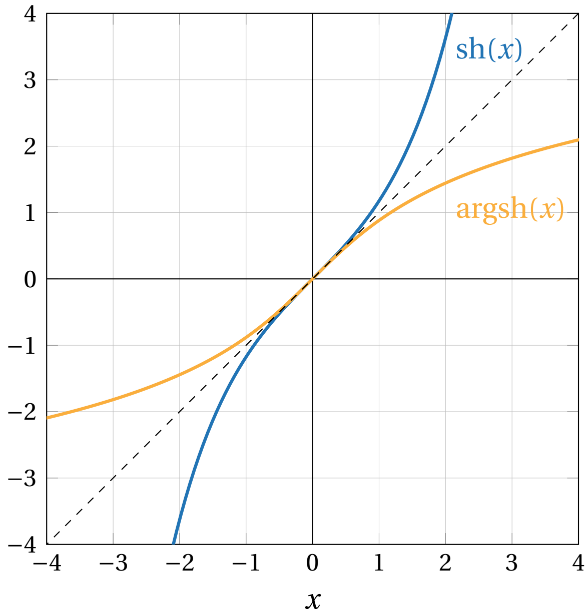
Les fonctions hyperboliques sont le cosinus hyperbolique, le sinus hyperbolique, la tangente hyperbolique et leurs réciproques.

6.1 Représentation graphique

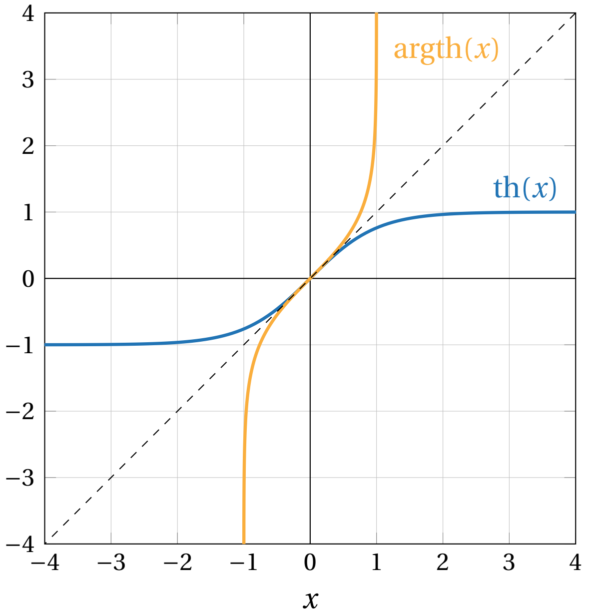
Cosinus et argcosinus hyperboliques



Sinus et argsinus hyperboliques



Tangente et argtangente hyperboliques



6.2 Propriétés

Expression des fonctions hyperboliques à partir de la fonction exponentielle

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)}$$

Dérivées des fonctions hyperboliques

- $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$
- $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{th}'(x) = 1/\mathrm{ch}^2(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$

Expression des fonctions hyperboliques réciproques

- $\mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
- $\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
- $\mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Dérivées des fonctions hyperboliques réciproques

- $\mathrm{argch}'(x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$
- $\mathrm{argsh}'(x) = 1/\sqrt{x^2 - 1}$
- $\mathrm{argth}'(x) = 1/1 + x^2$

Parité :

- Pour tout x, $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x$: la fonction cosinus hyperbolique est paire.
- Pour tout x, $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x$: la fonction sinus hyperbolique est impaire.
- Pour tout x, $\mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}x$: la fonction tangente hyperbolique est impaire.

Encadrement : Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $-1 \leq \mathrm{th}x \leq 1$

Valeurs remarquables :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{th}(x)$	-1	0	1

6.3 Formules hyperboliques

- $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

- $\mathrm{ch}(a + b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$

- $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$
- $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$
- $\mathrm{ch}^2(x) = (\mathrm{ch}(2x)+1)/2$
- $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$
- $\mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(2x)-1)/2$