Séance 9 Intégrales numériques

Pour ce TD, on utilisera le compilateur python web Codabrainy :

https://www.codabrainy.com/python-compiler/

1 Retour sur la méthode des rectangles

Exemple de code numérique en Python : intégrer la fonction $f(x) = x^2 + 2x + \cos(x)$ entre 0 et 1 avec 20 rectangles.

Librairies Python
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Variables numériques
```
xmin = 0              # borne inférieure
xmax = 1              # borne supérieure
nbx = 21              # nombre de points
nbi = nbx - 1         # nombre d'intervalles
```

Évaluation numérique de la fonction
```
x = np.linspace(xmin, xmax, nbx)     # abscisses
y = x**2+2*x+np.cos(x)               # évaluation de f(x)
plt.plot(x,y,"bo-")
```

Somme de l'aire des rectangles
```
integrale = 0                        # initialisation
for i in range(nbi):                 # boucle for
    integrale = integrale + y[i]*(x[i+1]-x[i])
    # dessin du rectangle
    x_rect = [x[i], x[i], x[i+1], x[i+1], x[i]]
    y_rect = [0 , y[i], y[i] , 0 , 0 ]
    plt.plot(x_rect, y_rect,"r")
```

Résultats
```
print("integrale =", integrale)      # affichage du résultat
plt.show()
```

Les fonctions en bleu correspondent aux représentations graphiques du calcul numérique. Attention à l'indentation de la boucle for, en Python, c'est l'indentation qui délimite l'intérieur de la boucle for.

1.1 Exercice 1

Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1. Calculer analytiquement l'intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. indication : poser $x = sin(t)$ pour effectuer un changement de variable.
2. En vous inspirant du code ci-dessus, tracer sur votre ordinateur la fonction $f(x)$ en utilisant un programme écrit en Python.
3. En vous inspirant du code ci-dessus, mettre en place une boucle avec 20 rectangles pour calculer l'intégrale de $f(x)$ entre 0 et 1. Consigner la valeur avec 5 décimales.
4. En vous inspirant du code ci-dessus, mettre en place une boucle avec 40, 80, 160, 320 et 640 rectangles pour calculer l'intégrale de $f(x)$ entre 0 et 1. Ne pas tracer les rectangles. Consigner les valeurs numériques avec 5 décimales.
5. Sachant que $\pi \simeq 3,14159265....$ Commenter vos résultats numériques

2 Méthode des trapèzes

2.1 Exercice 2

Soit $f(x) = \sqrt{1-\cos(x)^2}$

1. En vous inspirant du code ci-dessus, tracer sur votre ordinateur la fonction $f(x)$ en utilisant un programme écrit en Python.
2. Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$. Avec la méthode des trapèzes, mettre en place une boucle avec 20 trapèzes pour calculer l'intégrale de $f(x)$ entre 0 et π. Consigner la valeur avec 5 décimales.
$$\int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\cos(x)\right]_0^\pi = 2$$
3. Mettre en place une boucle avec 40, 80, 160, 320 et 640 rectangles pour calculer l'intégrale de $f(x)$ entre 0 et π. Ne pas tracer les rectangles. Consigner la valeur avec 5 décimales.
4. Commenter vos résultats numériques.

2.2 Méthode de Simpson

Principe : La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse x_k, x_{k+1} et $x_k + x_{k+1}/2$ (il faut trois points pour déterminer une parabole. Nous ne ferons pas les calculs, mais nous contenterons de donner la formule d'approximation donnée par la méthode de Simpson :

$$I \simeq \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})$$

Cette méthode donnes des valeurs approchées de I qui convergent encore plus rapidement que les deux méthodes précédentes.

2.3 Exercice 3

Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\cosh(x)}$

1. Calculer l'intégrale de f(x) entre 2 et 10 avec la méthode des rectangles et 10 rectangles.
2. Calculer l'intégrale de f(x) entre 0 et 10 avec la méthode des trapèzes et 10 intervalles.
3. Calculer l'intégrale de f(x) entre 0 et 10 avec la méthode de Simpson et 10 intervalles.
4. Faites un test de convergence avec n'importe qu'elle méthode et conclure quant à la rapidité de convergence des 3 méthodes.