Séance 7 Techniques d'intégration

Lorsque l'on essaye de trouver une primitive, on doit tenter, dans l'ordre :

1. Repérer la forme d'une fonction simple f'
2. Repérer une forme composée $f' \times g' \circ f$
3. Essayer une intégration par parties $u'v = uv - v'u$
4. Essayer un changement de variable
5. Il existe d'autres techniques en dehors du cadre de ce cours. -> Essayer un logiciel de calcul formel.

1 Intégration par parties (IPP)

Rappel de la méthode :

Identifier l'intégrale à : $\displaystyle\int_a^b u \, \mathrm{d}v$

Appliquer la formule : $\displaystyle\int_a^b u \, \mathrm{d}v = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v \mathrm{d}u$

Calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (x^3 - 2x + 5)e^{-x/2} \, \mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int \sin(3x)\mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x) \, \mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x^2 \ln(x^2) \, \mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int \arctan(x) \, \mathrm{d}x$ indication : remarquer que $\arcsin(x) = 1 \times \arcsin(x)$
6. $I_6 = \displaystyle\int \arcsin(x) \, \mathrm{d}x$ indication : remarquer que $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$

2 Changement de variable

Calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$. Indication : poser $x = \mathrm{sh}(t)$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \cos^{101}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Indication : poser $\cos(x) = t$.
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$. Indication : poser $t = e^x - 1$.
4. $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}\,\mathrm{d}x$. Indication : poser $t = \sqrt{x}$.

3 Problème de mécanique

Le calcul de la déformée d'une poutre de section variable peut impliquer une intégration par changement de variable. Nous considérons une poutre dont le moment quatratique est donné pas $I = I_0\sqrt{1+\sqrt{1-x/L}}$. L'équation de la déformation de la poutre est

$$EI_0\sqrt{1+\sqrt{1-x/L}}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = FL(1-x/L)$$

Ce qui donne sous forme adimensionnée,

$$\mathrm{x} = x/L \text{ et } \mathrm{y} = y/L,\quad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} = \frac{FL^2}{EI_0}\frac{1-\mathrm{x}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\mathrm{x}}}}$$

1. Trouver l'équation de la déformée adimensionnée $\mathrm{y}(\mathrm{x})$.

   Indications :

   (a) Effectuer un premier changement de variable $t = 1 - x$.

   (b) Effectuez un second changement de variable $u = 1 + \sqrt{(}t)$

   (c) Effectuez un troisième changement de variable $v = \sqrt{u}$.

   (d) Intégrer une fois le polynôme en v. Donner $y'(v)$

   (e) Réexprimer v en fonction de x. Donner $y'(\mathrm{x})$

   (f) Intégrer $y'(\mathrm{x})$