Séance 6 Intégrales simples

1 Intégrales simples

Calculer les intégrales suivantes. On cherchera particulièrement à reconnaître les formes $f'(x)f^{\alpha}(x)$.

1. $I_1 = 3\int x^2 + x^3 + \frac{x^4}{5}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = 3\int x^2 + x^3 + \frac{x^4}{5}\,\mathrm{d}x + \int -3x^2 - 3x^3\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \int_1^2 2(3x-1)(3x^2-2x+3)^2\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \int \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}\,\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \int \frac{ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

2 Intégrales de fonctions trigonométriques et hyperboliques

Intégrales de la forme :

$$\int_a^b \sin^n(x)\cos^p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_a^b \sinh^n(x)\cosh^p(x)\,\mathrm{d}x$$

Cas 1: Si n et ou p impair(s). On prend par exemple n impair, il existe un $j \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2j+1$.

Étape 1 : Transformer l'une des puissances impaire en puissance paire.

$$\int_a^b \sin^{2j+1}(x)\cos^p(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sin^{2j}(x)\sin(x)\cos^p(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$= \int_a^b (1-\cos^2(x))^j \sin(x)\cos^p(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\cos^{2i}\right)\cos^p(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\int_a^b \left(\cos^{2i}\right)\cos^p(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$= \sum_{i=0}^{j}\left(\binom{j}{i}\int_a^b \left(\cos^{2i+p}\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x\right) \tag{5}$$

Étape 2 : Dérivée composée. $\left(\cos^{2i+p+1}\right)'(x) = -(2i+p+1)\sin(x)\cos^{2i+p}(x)$ donc :

$$\int_a^b \left(\cos^{2i+p}\right)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2i+p+1}\left[\cos^{2i+p+1}(x)\right]_a^b$$

Étape 3 : Donner le résultat.

$$\int_a^b \sin^{2j+1}(x)\cos^p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{j}\left(-\binom{j}{i}\frac{1}{2i+p+1}\left(\cos^{2i+p+1}(a)-\cos^{2i+p+1}(b)\right)\right)$$

Cas 2 : si n et p pairs. Alors il existe i et $j \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2i$ et $p = 2j$

Étape 1 Linéariser avec les formules des angles doubles

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2} \quad \text{et} \quad \cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$$

$$\int_a^b \sin^{2i}(x)\cos^{2j}(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^i\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^j\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2^{i+j}}\int_a^b \left(\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}(-1)^l\cos^l(2x)\right)\left(\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}\cos^m(2x)\right)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Étape 2 : Regrouper par puissances de $\cos(2x)$.
Résoudre les éléments impaires avec la méthode précedente.

Étape 3 : On ré-applique la présente méthode pour les puissances paires.

Mettre en pratique sur les cas simples suivants :

1. $I_1 = \int \sin^5(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

2. $I_2 = \int \cos^3(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

3. $I_3 = \int \cosh^4(2x)\,\mathrm{d}x$

3 Lien avec la mécanique

3.1 Déformée de la poutre console

Une poutre encastrée libre soumise à un poids P à son extrémité est décrite par l'équation $EIy''(x) = F(L-x)$ où E est le module d'Young, I le moment d'inertie, F la force appliquée en bout de poutre.

1. Calculer $y'(x) = \int_0^x y''(x)\mathrm{d}x$

2. Calculer la déformée de la poutre $y(x) = \int_0^x y'(x)\mathrm{d}x$

3. Vérifier que la flèche de la poutre est bien $y(L) = \frac{FL^3}{3EI}$

3.2 Moment quadratique

Le moment quadratique I d'une poutre dépend de la forme de la poutre.

1. Pour une poutre rectangulaire de côté $2a$, $I = \int_{-a}^{a} (2a)x^2\,\mathrm{d}x$. Calculer I.

2. Pour une poutre cylindrique de rayon r, $I = 4r^4 \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Calculer I.

4 Problèmes

4.1 Hauteur moyenne de la ligne électrique

La hauteur, en mètres, d'une ligne électrique de 160 m peut être modélisée par la fonction h définie sur $[-80;80]$ par $h(x) = 10\big(\exp(x/40) + \exp(-x/40)\big)$.

1. Écrire $h(x)$ avec les fonctions hyperboliques

2. Calculer la hauteur moyenne de la ligne électrique.

4.2 Perte d'énergie d'un moteur

L'énergie perdue par un moteur sur 1 cycle correspond à l'aire entre 2 courbes. Le cycle aller est décrit sur $[0;1]$ par la fonction par $f(x) = x^{3/2}$ et le retour par la fonction $g(x) = x^{2/3}$. L'unité d'aire vaut ici 100 Joules.

1. Déterminer l'aire, en unités d'aires, de la surface comprise entre les 2 courbes.

2. En déduire l'énergie perdue sur un cycle en Joules.