Séance 5 Diagonalisation

Nous allons utiliser l'outil de calcul formel Wolfram|Alpha. Cet outil est gratuit et permet de réaliser facilement de nombreux calculs simples grâce au solveur de Mathematica. La réponse est généralement présentée sous une forme lisible par un être humain. Il pourra vous être utile de maîtriser les rudiments de langage formel pour la suite de vos études.

Wolfram|Alpha répond aussi à de nombreux types de questions posées en anglais, mais c'est en dehors du cadre de ce TP.

Pour commencer, rendez vous sur la page web de Wolfram|Alpha, `https://www.wolframalpha.com/`

1 Utilisation basique de Wolfram|Alpha

Wolfram|Alpha est basé sur le moteur de calcul formel de Mathematica. C'est dans ce langage là qu'il comprend le plus facilement les requêtes de l'utilisateur.

Avec Mathematica, les tableaux s'écrivent en lignes. Les éléments de chaque ligne sont séparés par des virgules et chaque ligne est délimitée avec des accolades { et }. Les lignes sont séparées entre elles par des virgules. Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit `{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}`

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer à la main le produit AB. Écrire à la main le code pour vérifier ce calcul puis entrer ce code dans la barre de recherche de Wolfram|Alpha.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 4 \\ 4 & y & 5 \\ 1 & x & 2 \end{pmatrix}$. Vérifiez numériquement les calculs suivants, lesquels sont faux?

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 59 & 14 & 62 \\ 54 & 19 & 50 \end{pmatrix} \qquad BC = \begin{pmatrix} 8 & 2y & 10 \\ 29 & 5x+5y+4\pi & 51 \\ 42 & 2x+8y+8\pi & 76 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 8 & 3x+y+\pi & 15 \\ 9 & x+y+4\pi & 23 \\ 20 & 9x+y+7\pi & 50 \end{pmatrix} \qquad CA = \begin{pmatrix} 29+4 & 5+\pi & 39+\pi \\ 4y+39 & y+9 & y+57 \\ 4x+15 & x+3 & x+21 \end{pmatrix}$$

Wolfram|Alpha permet aussi de réaliser des calculs plus complexes avec des fonctions pré-implémentées. Les fonction s'écrivent `Nom_de_la_fonction[·]`.

1. Calculer le déterminant d'une matrice `Det[]` de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
2. Calculer le déterminant $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{vmatrix}$
3. Vérifiez que les racines du polynôme caractéristique de la matrice A sont bien $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3(5-\sqrt{33})/2$, $\lambda_3 = 3(5-\sqrt{33})/2$. Indication : Utiliser la fonction `Solve[`*equation, variable*`]`. Indiquer si il y a une erreur.

2 Diagonalisation

2.1 Exercice 1

Le but de cet exercice est de diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 2 & 8 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ et de vérifier les résultats numériquement avec l'outil Wolfram|Alpha.

1. Écrire le polynôme caractéristique de la matrice A sous forme factorisée. En déduire Les valeurs propres de A. Classer les valeurs propres telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
2. Vérifier votre calcul avec Wolfram|Alpha.
3. Trouver le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1. Choisir le vecteur tel que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$.
4. Trouver le vecteur propre associé à la valeur propre λ_2. Choisir le vecteur tel que $X_2 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{pmatrix}$.
5. Trouver le vecteur propre associé à la valeur propre λ_3. Choisir le vecteur tel que $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$.
6. Écrire la matrice de passage de la base diagonale vers la base initiale.
7. Écrire la matrice de passage inverse, de la base initiale vers la base diagonale.
8. Vérifier votre calcul avec Wolfram|Alpha. Indication Utiliser la fonction `Inv[]` de Mathematica.
9. Écrire la matrice A dans la base diagonale.
10. Vérifier tous ces résultats aisément avec la fonction `Diagonalize[]` de Mathematica.

2.2 Exercice 2

Le but de cet exercice est de diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 10 & -2 \\ -7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et de vérifier les résultats numériquement avec l'outil Wolfram|Alpha.

1. Écrire le polynôme caractéristique de la matrice A sous forme factorisée. En déduire Les valeurs propres de A. Classer les valeurs propres telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
2. Vérifier votre calcul avec Wolfram|Alpha.
3. Trouver le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1. Choisir le vecteur tel que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$.
4. Trouver le vecteur propre associé à la valeur propre λ_2. Choisir le vecteur tel que $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$.
5. Trouver le vecteur propre associé à la valeur propre λ_3. Choisir le vecteur tel que $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$.
6. Écrire la matrice de passage de la base diagonale vers la base initiale.
7. Calculer la matrice de passage inverse, de la base initiale vers la base diagonale.
8. Vérifier votre calcul avec Wolfram|Alpha. Indication Utiliser la fonction `Inv[]` de Mathematica.
9. Écrire la matrice A dans la base diagonale.
10. Vérifier tous ces résultats aisément avec la fonction `Diagonalize[]` de Mathematica. Commenter.