Séance 4 Changement de base

1 Exercice 1

Soit $B_0 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\vec{x} = 2\vec{v} + \vec{w}\,, \quad \vec{y} = -\vec{u} + 2\vec{v}\,, \quad \text{et} \quad \vec{z} = \vec{v} + 2\vec{w}$$

1. Vérifier que les vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ forment une base B_1 de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de passage P de B_1 vers B_0
3. En déduire P^{-1}

2 Exercice 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni d'une base canonique B_0. On considère les vecteurs

$$\vec{u} = (0,1,1)\,, \quad \vec{v} = (2,0,-1)\,, \quad \text{et} \quad \vec{w} = (2,1,1)$$

1/ Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$; Soit B_1 cette base. 2/ Déterminer les coordonnées dans la base B_1 du vecteur $\vec{a}$ de coordonnées (1,1,1) dans la base B.

3 Exercice 3

Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^4$ définie par les vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ quatre autres vecteurs de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4 \\ \vec{x}_2 = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2e_3 + 2\vec{e}_4 \\ \vec{x}_3 = -\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{x}_4 = \vec{e}_1 \end{cases}$$

1. Vérifier que les vecteurs $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ forment une base B' de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire les matrices de passage P et P^{-1} de B' à B et de B à B'.
3. Soit $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$ déterminer ses coordonnées dans la base B'.

4 Exercice 4

Soit dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs : On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j}, \quad f(\vec{j}) = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = \vec{j} - \vec{k}$$

Quelle est la matrice représentative de l'application linéaire f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?