Séance 3 Résolution de systèmes linéaires

1 Calcul de matrices inverses

1.1 Matrices 2×2

Pour rappel, les inverses des matrices 2×2 sont données par $A^{-1} = \text{com}(A)^T / \det(A)$. Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

   Calculer A^{-1}, B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2}.

2. Soit une matrice de rotation 2D. $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^{-1}$. Commenter.

1.2 Matrices de plus grande dimension

Pour les matrices de plus grande dimension, on a $A^{-1} = \text{com}(A)^T / \det(A)$.

1. Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer si la matrice est inversible. Si oui, calculer l'inverse :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit $E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2E - E^2$. Sans calcul, en déduire E^{-1}.

2 Résolution de systèmes linéaires

2.1 Exercice 1

1. Écrire sour forme matricielle les systèmes linéaires suivants

$$(S1)\begin{cases} 3x+y=2 \\ 6x+2y=2 \end{cases} \qquad (S2)\begin{cases} 5x+2y-7z=4 \\ x-y-z=0 \\ -3x-4y+5z=2 \end{cases} \qquad (S3)\begin{cases} 3x+7y-3z=9 \\ 2x-2y-3z=0 \\ -6x+2y-z=2 \end{cases}$$

2. Ces systèmes linéaires ont-ils une solution unique ?
3. Pour (S3), trouver la matrice inverse du système linéaire.
4. Donner la solution de (S3).

2.2 Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de A. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

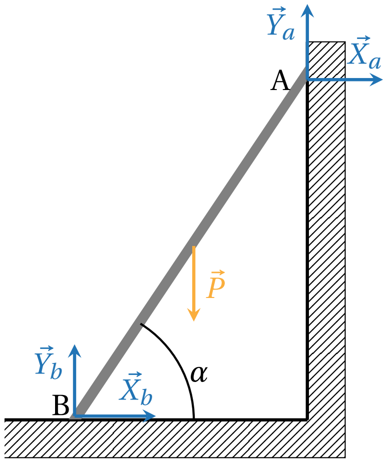
$$(S4)\begin{cases} 4x+4y+6z=1 \\ x-y=0 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$$

2.3 Exercice 3

Résoudre le système suivant

$$(S5)\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+2y+3z+4t=0 \\ x+3y+4z+5t=1 \\ x+4y+5z+5t=6 \end{cases}$$

3 Lien avec la mécanique



On considère une échelle posée contre un mur. L'échelle est soumise à son poids, et à la réaction du sol et du mur (avec frottements). On cherche à déterminer les 4 réactions du mur sur l'échelle $(X_a,\ Y_a,\ X_b, Y_b)$. L'équilibre statique des forces donne (1) $Y_a - P + Y_b = 0$ (projection des forces sur la verticale) et (2) $X_a + X_b = 0$ (projection des forces sur l'horizontale). L'équilibre des moments au point B (niveau du sol) donne (3) $-P\cos\alpha L/2 + Y_a\cos\alpha L - X_a\cos\alpha L = 0$. Enfin on suppose que l'échelle est à la limite du glissement en B, avec la loi de frottement de coulomb (4) $X_b = \mu Y_b$ où μ est le coefficient de friction.

1. Écrire ces 4 équations comme un système linéaire à 4 inconnues.
2. Écrire ce système sous forme matricielle.
3. Calculer la matrice inverse.
4. Résoudre le problème.

4 Problème

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant :

$$(S6)\left\{\begin{array}{l} 2x + \lambda y + z + t = 1 \\ 2\lambda x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4z + 5t = 1 \\ x + 4y + 5z + 5t = 6 \end{array}\right.$$

1. Déterminer pour quel valeur de λ le système linaire n'a pas de solution unique.
2. Donner les solutions du système linéaire lorsque $\lambda = 1$