Institut Universitaire de Technologie
Aix Marseille Université

Séance 2 Déterminants

1 Calcul de déterminant (développement ligne / colonne)

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\det(A)=\begin{vmatrix}7&11\\-8&4\end{vmatrix}\qquad \det(B)=\begin{vmatrix}2&3\\6&4\end{vmatrix}\qquad \det(C)=\begin{vmatrix}x&1\\0&y\end{vmatrix}$$

$$\det(D)=\begin{vmatrix}1&0&6\\3&4&15\\5&6&21\end{vmatrix}\qquad \det(E)=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&4&5\\5&6&7\end{vmatrix}\qquad \det(F)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&3&5\\4&1&3\end{vmatrix}$$

$$\det(G)=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{vmatrix}\qquad \det(H)=\begin{vmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}\qquad \det(I)=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\1&3&1&3\\2&1&0&6\\1&1&1&7\end{vmatrix}$$

2 Simplification de déterminant par substitution linéaire

Calculer les déterminants des matrices en effectuant des combinaisons linéaires sur les lignes (du type $L_1 = 1L_1 + L_2 - 2L_3$) ou les colonnes (du type $C2 = -C_1 + 1C_2 + 0C_3$). Le but est de faire apparaître un maximum de zéros dans le déterminant pour qu'il soit facile à développer ensuite. Dans le meilleur de cas, on essayera de rendre le déterminant triangulaire supérieur ou inférieur ou bien de faire apparaître une ligne nulle, une colonne nulle s'il est nul. Attention dans les combinaisons linéaires effectuées, le coefficient devant la ligne ou la colonne que l'on change doit être 1 : $L_k = \sum \lambda_i L_i$, avec $\lambda_k = 1$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&x\\x&x^2\end{vmatrix}\qquad \det(B)=\begin{vmatrix}12&6\\1&3\end{vmatrix}\qquad \det(C)=\begin{vmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$\det(D)=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&1\\4&3&2\end{vmatrix}\qquad \det(E)=\begin{vmatrix}x&y&z\\x&-y&0\\x&0&-z\end{vmatrix}\qquad \det(F)=\begin{vmatrix}1&a&b+c\\1&b&c+a\\1&c&a+b\end{vmatrix}$$

3 Calcul de comatrices (voir résolution de systèmes linéaires)

1. Calculer les comatrices des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les transposées des comatrices.

4 Factorisation de déterminants (voir diagonalisation de matrices)

Factoriser les déterminants suivants :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3-t & 10 & 5 \\ 5 & 8-t & 5 \\ -10 & -20 & -12-t \end{vmatrix} \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda+2 & 1 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

5 Lien avec la mécanique

En mécanique les déterminants sont souvent utilisés pour savoir si un système d'équations linéaires admet une solution unique – ou pas. Un système admet une solution unique lorsque le déterminant est non nul ($\det(A) \neq 0$).

6 Problème

Calculer les déterminants (n,n) suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x & x \\ x & x+y & x & \cdots & x & x \\ x & x & x+y & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+y & x \\ x & x & x & \cdots & x & x+y \end{vmatrix}$$