

Séance 1 Calcul matriciel

1 Matrices : Addition, soustraction et multiplication par un réel

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{d. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
 \text{b. } -2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{e. } \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 7y \\ x & 1 & -2 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5x \\ 3x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{c. } 2 \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right) &
 \end{array}$$

2 Matrices : Multiplication

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D = (x \ y \ z)$.

Calculer DC , CD , AC , BC , DA , AB , BA , $A(CD)$ et $(DA)C$.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 , B^2 , AB et BA .

3. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^p et B^p pour tout $p \geq 0$.

Montrer que $AB = BA$ (pourquoi est-ce évident?).

Calculer $(A+B)^p$.

3 Utilisation en mécanique

En mécanique la multiplication matricielle peut être utilisée pour calculer l'angle vers lequel pointe une rotule ayant subi une rotation R_x d'angle α selon l'axe \vec{x} , une rotation R_y d'angle β selon l'axe \vec{y} .

Les matrices de rotation s'écrivent $R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ et $R_y = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit des matrices R_x et R_y . Est-ce que $R_x R_y = R_y R_x$?
2. Soit $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la position du doigt de la rotule. Calculez la position finale du doigt de la rotule après les 2 rotations consécutives $(R_x R_y)X$.
3. Réalisez le même calcul si la rotule pointe initialement dans la direction \vec{y}

4 Problème

Une entreprise de terrassement désire fabriquer des accessoires pour ses pelleteuses : une pelle à dents profilées P et un nouveau siège plus confortable S. Elle désire commander les matières premières nécessaires pour la fabrication de ces accessoires. On dispose des informations suivantes :

- La fabrication d'une pelle P nécessite 3 kg de plastique, 55 kg d'acier et 38 kg de d'autres alliages métalliques.
- La fabrication d'une siège S nécessite 8 kg de plastique, 5kg d'acier et 1kg d'autres alliages métalliques.

Par ailleurs, l'entreprise a réalisé les prévisions de ventes suivantes :

- elle pense vendre 100 pelles P et 80 sièges S en septembre ;
- elle pense vendre 250 pelles P et 120 sièges S en octobre.

1. Disposer les informations obtenues sous la forme de deux tableaux.
2. En effectuant un produit matriciel, déterminer la quantité d'acier à commander pour le mois d'octobre, la quantité de plastique pour le mois de septembre.