Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Séance 7 Étude de fonctions

1 Calcul de dérivées

1.1 Exercice 1

Soit $f(x) = \sin(-2x)$.

1. Calculer les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.

   $f'(x) = -2\cos(-2x)$

   $f''(x) = -4\sin(-2x)$

   $f'''(x) = 8\cos(-2x)$

   $f^{(4)} = 16\sin(-2x)$

1.2 Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = 8x^2 + 4x - 12/x$.

1. Calculer $f'(x)$.

   $f'(x) = 16x + 4 + 12/x^2$

2. Discuter du signe de $f'(x)$.

   $\forall x \in]0; +\infty[$, $16x > 0$, $12/x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$

3. Calculer la limite de f lorsque $x \to 0$ et la limite de f lorsque $x \to +\infty$.

   $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 8x^2 + 4x - 8/x = \lim_{x\to 0} 0 + 0 - \infty = -\infty$

   $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 8x^2 + 4x - 12/x = \lim_{x\to +\infty} +\infty + \infty - 0 = +\infty$

4. Établir le tableau de variations de f. Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle ?

Domaine de définition,	x	0	1	$+\infty$
Signe de la dérivée	$f'(x)$		$+$	
Variation de la fonction f et valeurs remarquables	f	$-\infty$	0	$+\infty$

l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution.

5. Calculer $f(x) = 0$ et compléter le tableau de variations.
   $f(x) = 0 \Longrightarrow 8x^3 + 4x^2 - 12 = 0$. 1 est racine évidente.

1.3 Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. sur $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = (x^2 + 3x - \ln(x))(\exp(x) + x^{2/3} - 5)$

$$f'(x) = \left(x^{2/3} + e^x - 5\right)\left(2x - \frac{1}{x} + 3\right) + \left(e^x + \frac{2}{3x^{1/3}}\right)\left(x^2 + 3x - \ln(x)\right)$$

2. sur $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(\exp(x) + x)}{\cos(2x)}$

$$f'(x) = \frac{e^x + 2(x + e^x)\tan(2x) + 1}{\cos(2x)}$$

3. sur $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \sin^2(x + x^{-2/3})$

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{2}{3x^{5/3}}\right)\sin(x + x^{-2/3})\cos(x + x^{-2/3})$$

2 Tableau de variations

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

1. Étude d'une fonction auxiliaire :

   a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2e^x - 1$ Étudier le sens de variation de la fonction g. on a $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x$
   $\forall x \in]0;+\infty[$, $x > 0$, $x^2 > 0$ et $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$

   b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0;+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   $g(0) = -1 < 0$ et $\underset{\lim}{x \to \infty} = \infty$ g est strictement croissante car sa dérivée est strictement positive. Donc il existe un réel a tel que g(a)=0.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703; 0,704[$.
   $g(0,703) < 0$ et $g(0,704) > 0$

   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.
   $g(x) < 0$ sur $]0;a[$ et $g(x) > 0$ sur $]a;\infty[$

2. Étude de la fonction f :

   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   $\underset{\lim}{x \to 0} = +\infty$
   $\underset{\lim}{x \to \infty} = +\infty$

   b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Démontrer que pour tout réel strictement positif : $f'(x) = g(x)/x^2$

   $$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

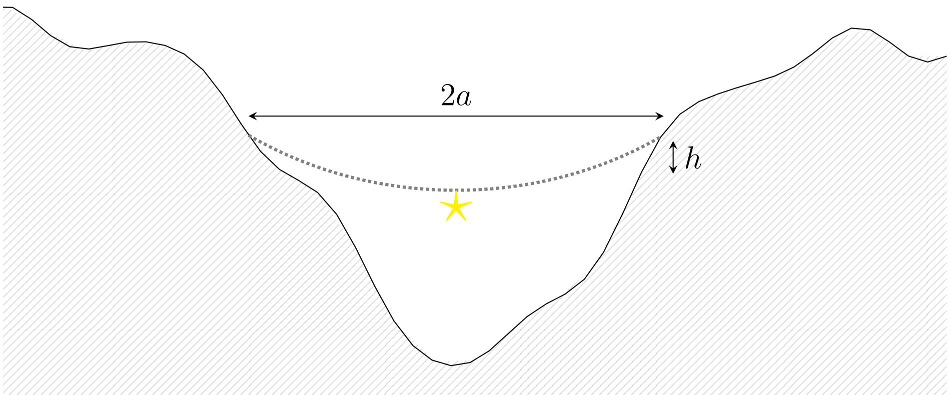
   c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est de même signe de $g(x)$

Domaine de définition,	x	0		$a \simeq 0.703$		$+\infty$
Signe de la dérivée	$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	f	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

   d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$
   f est minimale en a. $f(a) = e^a + 1/a$ or $g(a) = a^2e^a - 1 = 0 \Longrightarrow e^a = 1/a^2$ donc $f(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = m$

   e. Justifier que : $3,43 < m < 3,45$.
   à calculer avec l'encadrement de a !

3 Problème de mécanique



Au village de Moustier-Sainte-Marie, une chaîne est pendue entre deux montagnes et une étoile accrochée en son centre. On indique que la forme d'une chaîne pendue entre deux points est un cosinus hyperbolique de telle sorte que le profile de la chaine soit $z(x) = \cosh(\alpha x) - 1$, $x \in [-a, a]$. La chaine est suspendue à une hauteur h au dessus de son point le plus bas (pris ici comme référence) et la distance d'un bout à l'autre de la montage est $2a = 200$ m. On souhaite déterminer les angles des chaines à leur point d'insertion dans la montagne et la position de l'étoile.

1. Résultats préliminaires :

   a. Rappeler les définitions de cosh et sinh avec la fonction exponentielle.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   b. Montrer que cosh est paire et sinh impaire.

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

   c. Montrer que les fonctions cosh et sinh sont dérivables, et que, pour tout t, on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.

   Les fonctions sont dérivables somme addition de fonctions dérivables.

$$\cosh'(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh(t)$$

$$\sinh'(t) = \frac{1}{2}(e^t - (-e^{-t})) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\cosh(t)$$

d. Tracer les tableaux de variations des fonctions cosh et sinh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de cosh et *sinh* en 0.

Domaine de définition,	x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de la fonction	$\cosh(x)$		$+$	$+$	$+$	
Signe de la fonction	$\sinh(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de $\cosh(x)$	$f' = \sinh$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
Variation de $\sinh(x)$	$f' = \cosh$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. La longueur de la chaine L est donnée en fonction de l'écartement des 2 montagnes $2a$ et du paramètre α : $L = 2a + \frac{a^3}{3}\alpha^2 + \frac{a^5}{60}\alpha^4$. Déterminer de α en fonction de a et L.

   Il faut résoudre une équation bi-carrée. On pose $U = \alpha^2$, l'équation peut se réécrire, $U^2 + \dfrac{20}{a^2}U + \dfrac{60(2a - L)}{a^5} = 0$

   On trouve $U = -\dfrac{20}{a^2} + \sqrt{\frac{400}{a^4} + \dfrac{240(L - 2a)}{a^5}}$

   donc $\alpha = \sqrt{-\dfrac{20}{a^2} + \sqrt{\frac{400}{a^4} + \dfrac{240(L - 2a)}{a^5}}} = \dfrac{1}{a}\sqrt{-20 + \sqrt{400 + 240(L/a - 2)}}$

3. Pour une chaine de Longueur $L = 250m$, déterminer la valeur numérique de α en m^{-1}.

   $\alpha = 1,67\ 10^{-2}\ \mathrm{m}^{-1}$

4. Déterminer l'équation de la hauteur du point d'attache h.

   $h = \cosh(a\alpha) - 1$.

   Réaliser l'application numérique pour déterminer de quelle hauteur pend la chaine.

   $h = 7,27$ m

5. Déterminer la pente de la chaine aux points d'encastrement.

   $z'(x) = \alpha \sinh(\alpha x)$

   Angle à l'encastrement : $\theta = \arctan(z'(a)) = \arctan(\alpha \sinh(\alpha a))$

   Application numérique :

   $z'(a) = 0,2744$

   $\theta = 0,2678\text{rad} = 15,34^o$