

Séance 7 Étude de fonctions

1 Calcul de dérivées

1.1 Exercice 1

Soit $f(x) = \sin(-2x)$.

1. Calculer les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.

1.2 Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = 8x^2 + 4x - 12/x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Discuter du signe de $f'(x)$.
3. Calculer la limite de f lorsque $x \rightarrow 0$ et la limite de f lorsque $x \rightarrow +\infty$.
4. Établir le tableau de variations de f . Combien de solutions l'équation $f = 0$ a-t-elle ?
5. Calculer $f(x) = 0$ et compléter le tableau de variations.

1.3 Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. sur $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = (x^2 + 3x - \ln(x))(\exp(x) + x^{2/3} - 5)$
2. sur $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(\exp(x) + x)}{\cos(2x)}$
3. sur $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \sin^2(x + x^{-2/3})$

2 Tableau de variations

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

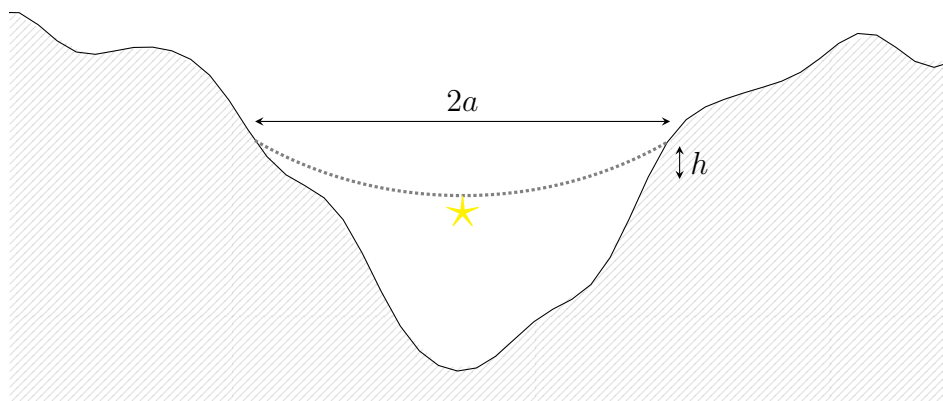
1. Étude d'une fonction auxiliaire :

- Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 e^x - 1$ Étudier le sens de variation de la fonction g .
- Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$. Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703; 0,704[$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f :

- Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Démontrer que pour tout réel strictement positif : $f'(x) = g(x)/x^2$
- En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$
- Justifier que : $3,43 < m < 3,45$.

3 Problème de mécanique



Au village de Moustier-Sainte-Marie, une chaîne est pendue entre deux montagnes et une étoile accrochée en son centre. On indique que la forme d'une chaîne pendue entre deux points est un cosinus hyperbolique de telle sorte que le profil de la chaîne soit $z(x) = \cosh(\alpha x) - 1$. La chaîne est suspendue à une hauteur h au dessus de son point le plus bas (pris ici comme référence) et la distance d'un bout à l'autre de la montagne est $2a = 200$ m. On souhaite déterminer les angles des chaînes à leur point d'insertion dans la montagne et la position de l'étoile.

1. Résultats préliminaires :
 - a. Rappeler les définitions de \cosh et \sinh avec la fonction exponentielle.
 - b. Montrer que \cosh est paire et \sinh impaire.
 - c. Montrer que les fonctions \cosh et \sinh sont dérivables, et que, pour tout t , on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.
 - d. Tracer les tableaux de variations des fonctions \cosh et \sinh . On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de \cosh et \sinh en 0.
2. La longueur de la chaîne L est donnée en fonction de l'écartement des 2 montagnes $2a$ et du paramètre α : $L = 2a + \frac{a^3}{3}\alpha^2 + \frac{a^5}{60}\alpha^4$. Déterminer de α en fonction de a et L .
3. Pour une chaîne de Longueur $L = 250m$, déterminer la valeur numérique de α .
4. Déterminer l'équation de la hauteur du point d'attache h . Réaliser l'application numérique pour déterminer de quelle hauteur pend la chaîne.
5. Déterminer la pente de la chaîne aux point d'encastrement.