Prérequis 1 Fonctions usuelles

1 Polynômes

1.1 Exercice 1

Soit $P(X) = X^3 + 2x^2 - 11x - 12$.

1. Montrer que -1 est racine évidente de P.

$$P(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 12 = -1 + 2 + 11 - 12 = 0$$

2. Si -1 est racine de P alors P est factorisable par $(X - (-1))$: $P(X) = (X - (-1))(aX^2 + bX + c)$. Déterminer les constantes a,b et c par identification des coefficients.
   On développe et on identifie les coefficients :

$$\begin{aligned} P(X) = (X-(-1))(aX^2+bX+c) = (X+1)(aX^2+bX+c) &= aX^3 + (b+a)X^2 + (b+c)X + c \\ &= 1X^3 + 2x^2 + (-11)x + (-12) \end{aligned}$$

   On trouve $\begin{cases} a=1 \\ b+a=2 \\ b+c=-11 \\ c=-12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-12 \end{cases}$ donc $P(X) = (X+1)(X^2 + X - 12)$

3. Déterminer les racines de $X^2 + X - 12$.
   $X^2 + X - 12 = 0$ on résout, $X = 1/2 \pm 7/2$. Les 2 racines sont donc $X = 3$ et $X = -4$
4. Factoriser P. On peut écrire $P(X) = (X+1)(X-3)(X-(-4)) = (X+1)(X-3)(X+4)$

1.2 Exercice 2

Soit $P(X) = X^4 - 9X^2 + 14$.

1. Déterminer les racines de P. (indication : équation bi-carrée, poser $U = X^2$).
   On pose $U = X^2$, $P(U) = U^2 - 9U + 14$. On cherche les racines $P(U) = 0 \Longrightarrow U = 9/2 \pm 5/2$ d'où les 2 racines $U = 7$ et $U = 2$. donc $P(U) = (U-7)(U-2)$.

2. Écrire P sous forme factorisée. $U = X^2 \iff X = \pm\sqrt{U}$. Les racines du polynôme sont donc $\sqrt{7}, -\sqrt{7}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.
   donc $P(X) = (X-\sqrt{7})(X+\sqrt{7})(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

1.3 Exercice 3

Factoriser $P(X) = X^4 - 3X^3 - 6X^2 + 8X$.
0 est racine évidente. 1 est racine évidente. Donc $P(X) = X(X-1)(aX^2 + bX + c)$
On développe, $P(X) = aX^4 + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (-c)X$, on trouve $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$. Donc $P(X) = X(X-1)(X^2 - 2X - 8)$.
On cherche les racines de $X^2 - 2X - 8 = 0$, on trouve $X = 1 \pm 3$ donc $X = -2$ et $X = 4$.
Donc la forme factorisée $P(X) = X(X-1)(X+2)(X-4)$

1.4 Exercice 4

Factoriser $P(X) = 2X^4 - 36X^2 + 144$.
Équation bi-carrée. $P(X) = 2(X-\sqrt{6})(X+\sqrt{6})(X-2\sqrt{3})(X+2\sqrt{3})$

2 Fonction usuelles

2.1 Exercice 1

Montrer que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$

1. Calculer la dérivée de $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$.
   Si l'on ne connait pas les dérivées de arcsin et de arccos par coeur, on peut dériver la relation $\sin(\arcsin(x)) = x$ avec la formule de la composition $(fog)' = g' \times f'og$. On obtient $\implies \arcsin'(x) \times \cos(\arcsin(x)) = 1$ donc
   $$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
   de la même manière, on peut montrer que
   $$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
   donc
   $$f'(x) = \arcsin'(x) + \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
   donc f est une fonction constante.
2. Calculer $\arcsin(0) + \arccos(0)$.
   $\arcsin(0) = 0$ et $\arccos(0) = \pi/2$ donc $f(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$
3. Conclure.
   f est constante et $f(0) = \pi/2$ donc pour tout x dans l'ensemble de définition, $f(x) = \pi/2$

2.2 Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}x)} = \sqrt{1+x^2}$ on utilise le fait que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
2. $\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x) = 2\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}x)\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x) = 2x\sqrt{1+x^2}$
3. $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}x) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{argch}x) - 1} = \sqrt{x^2-1}$

2.3 Exercice 3

Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(a) + \mathrm{sh}(a+x) = 0$
$\Longrightarrow \mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(a)) = \mathrm{argsh}(-\mathrm{sh}(a+x)) \Longrightarrow a = -a - x \Longrightarrow x = -2a$

2.4 Exercice 4

Montrer que $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)} = \frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)} \\
&= \frac{1/(\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b))}{1/(\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b))} \times \frac{\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a)}{\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)} \\
&= \frac{\mathrm{sh}(a)/\mathrm{ch}(a)+\mathrm{sh}(b)/\mathrm{ch}(b)}{1+\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)/(\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b))} \\
&= \frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}
\end{aligned}$$

3 Utilisation en mécanique

Les fonctions usuelles sont partout en mécanique. Il faut les pratiquer pour être à l'aise avec leur utilisation.

3.1 Exercice 1

Une fillette lance en l'air verticalement une balle. La balle quitte la main de la fillette avec une vitesse initiale v_0 . La balle subit la seule accélération de la pesanteur g. L'équation de la trajectoire de la balle est $z(t) = \dfrac{-gt^2}{2} + v_0 t$ et l'équation de sa vitesse est $v(t) = -gt + v_0$.

1. Au bout de combien de temps retombe-t-elle dans la main de la fillette ? indication : trouver la racine de $z(t)$.

   Les racines de $z(t)$ sont $z(t) = 0 \Longrightarrow \quad t = 0 \quad$ et $\quad t = 2V_0/g$. La première racine correspond à l'instant initial ou la pierre quitte la main de la fillette. La seconde racine $t = 2V_0/g$ correspond au temps où la balle retombe dans la main de la fillette.

2. Á quelle hauteur monte la balle ? indication : trouver la racine de $v(t)$.
   La balle est à son maximum au moment où sa vitesse est nulle. La racine de $v(t)$ est $t = v_0/g$, c'est le temps où la balle est au sommet de sa trajectoire. Il suffit d'évaluer l'altitude de la balle à cet instant donné : $z(v_0/g) = v_0^2/(2g)$

3.1.1 Exercice 2

Une poutre en vibration est décrite par l'équation $EI\dfrac{d^4y}{dz^4} + \rho S\dfrac{d^2y}{dt^2}$ où EI est le module de rigidité de la poutre. On peut montrer que les nombres d'onde normalisés k/L des modes propres de la poutre vibrante sont données par $1 + \cos(x)\mathrm{ch}(x) = 0$.

Pour estimer la valeur du nombre d'onde du premier mode, on change $\mathrm{ch}(x)$ en $2 - \cos(x)$, $1 + cos(x)\,(2 - \cos(x)) = 0$

1. Trouver la première racine strictement positive de cette équation. (indication poser $U = cos(x)$)
   L'équation devient $1 + U(2 - U) = 0 \longrightarrow U = 1 \pm \sqrt{2}$. La solution est donc la première racine positive de $\cos(x) = 1 - \sqrt{2}$ $\arccos(1 - \sqrt{2}) = 1.997$
2. Comparer le résultat obtenu à la valeur théorique 1,875.

4 Problème 1

Pour mesurer la profondeur d'un puits, votre professeur laisse tomber une pierre du bord du puits et chronomètre la durée qui s'écoule jusqu'au moment où il entend le bruit de l'impact de la pierre au fond du puits (il a pris soin de placer son oreille à hauteur du bord du puits). La durée mesurée est $\Delta t = 2,6$ s. Calculer la profondeur h du puits. On négligera les frottements de l'air sur la pierre et l'équation en h sera résolue numériquement. L'équation de la chute de la pierre est $z(t) = -gt^2/2$.

Données : $g = 9,81$ m.s^{-2} ; célécité du son dans l'air : $c = 340$ m.s^{-1}.

La profondeur du puits est donnée par $-\dfrac{g}{2}\left(\Delta t - \dfrac{h}{c}\right)^2 + h = 0$. Déterminer la profondeur du puits.

$$h = c(\Delta t + \frac{c}{g}) - c\sqrt{\left(\Delta t + \frac{c}{g}\right)^2 - \Delta t^2}$$

Application numérique : $h = 30,9$ m