Institut Universitaire de Technologie
Aix Marseille Université

Prérequis 1 Fonctions usuelles

1 Polynômes

1.1 Exercice 1

Soit $P(X) = X^3 + 2x^2 - 11x - 12$.

1. Montrer que -1 est racine évidente de P.
2. Si -1 est racine de P alors P est factorisable par $(X - (-1))$: $P(X) = (X - (-1))(aX^2 + bX + c)$. Déterminer les constantes a,b et c par identification des coefficients.
3. Déterminer les racines de $X^2 + X - 12$.
4. Factoriser P.

1.2 Exercice 2

Soit $P(X) = X^4 - 9X^2 + 14$.

1. Déterminer les racines de P. (indication : équation bi-carrée, poser $U = X^2$).
2. Écrire P sous forme factorisée.

1.3 Exercice 3

Factoriser $P(X) = X^4 - 3X^3 - 6X^2 + 8X$.

1.4 Exercice 4

Factoriser $P(X) = 2X^4 - 36X^2 + 144$.

2 Fonction usuelles

2.1 Exercice 1

Montrer que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$

1. Calculer la dérivée de $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$.
2. Calculer $\arcsin(0) + \arccos(0)$.
3. Conclure.

2.2 Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh} x)$
2. $\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh} x)$
3. $\mathrm{sh}(\mathrm{argch} x)$

2.3 Exercice 3

Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(a) + \mathrm{sh}(a + x) = 0$

2.4 Exercice 4

Montrer que $\mathrm{th}(a + b) = \dfrac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$

3 Utilisation en mécanique

Les fonctions usuelles sont partout en mécanique. Il faut les pratiquer pour être à l'aise avec leur utilisation.

3.1 Exercice 1

Une fillette lance en l'air verticalement une balle. La balle quitte la main de la fillette avec une vitesse initiale v_0 . La balle subit la seule accélération de la pesanteur g. L'équation de la trajectoire de la balle est $z(t) = \dfrac{-gt^2}{2} + v_0 t$ et l'équation de sa vitesse est $v(t) = -gt + v_0$.

1. Au bout de combien de temps retombe-t-elle dans la main de la fillette ? indication : trouver la racine de $z(t)$.
2. Á quelle hauteur monte la balle ? indication : trouver la racine de $v(t)$.

3.1.1 Exercice 2

Une poutre en vibration est décrite par l'équation $EI\frac{d^4y}{dz^4} + \rho S\frac{d^2y}{dt^2}$ où EI est le module de rigidité de la poutre. On peut montrer que les nombres d'onde normalisés k/L des modes propres de la poutre vibrante sont données par $1 + \cos(x)\text{ch}(x) = 0$.

Pour estimer la valeur du nombre d'onde du premier mode, on change $\text{ch}(x)$ en $2 - \cos(x)$, $1 + cos(x)\,(2 - \cos(x)) = 0$

1. Trouver la première racine strictement positive de cette équation. (indication poser $U = cos(x)$)
2. Comparer le résultat obtenu à la valeur théorique 1,875.

4 Problème 1

Pour mesurer la profondeur d'un puits, votre professeur laisse tomber une pierre du bord du puits et chronomètre la durée qui s'écoule jusqu'au moment où il entend le bruit de l'impact de la pierre au fond du puits (il a pris soin de placer son oreille à hauteur du bord du puits). La durée mesurée est $\Delta t = 2,6$ s. Calculer la profondeur h du puits. On négligera les frottements de l'air sur la pierre et l'équation en h sera résolue numériquement. L'équation de la chute de la pierre est $z(t) = -gt^2/2$.

Données : $g = 9,81$ m.s^{-2} ; célécité du son dans l'air : $c = 340$ m.s^{-1}.

La hauteur du puits est donnée par $-\frac{g}{2}\left(\Delta t - \frac{h}{c}\right)^2 + h = 0$. Déterminer la profondeur du puits.