

Exercices supplémentaires

1 Calcul matriciel

1.1 Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices d'ordre 4.

1. Calculer B^4 .
2. Exprimer A en fonction de B et de I_4 ; En déduire A^n .

1.2 Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, par récurrence déterminer A^n pour n entier non nul.

2 Déterminant

2.1 Exercice 1

Montrer, sans le développer (par substitution linéaires uniquement) que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$$

2.2 Exercice 2

Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

3 Systèmes linéaires

L'étude de l'équilibre statique d'un système mécanique a donné lieu à l'écriture de 3 équations reliant les inconnues du système (x_1, x_2 et x_3) : $x_1 + x_2 - P = 0$; $x_2 - \cos \alpha x_3 = x_1 + 1$ et $\sin \alpha x_3 = x_1 - \sin \alpha (P + x_2)$.

1. Écrire ces 3 équations comme un système linéaire à 3 inconnues.
2. Écrire ce système sous forme matricielle.
3. À quelle condition sur α n'y a-t-il pas une solution unique?
4. Calculer la matrice inverse.
5. Résoudre le problème.

4 Intégration

INTEGRATION : Calcul Direct
Correction de quelques exercices

Ex 3 : *Calcul par intégration par parties*

(h) $\int \sqrt{x} \cdot \ln(x) dx$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cdot \ln(x) dx &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(x) - \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx + K \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(x) - \frac{2}{3} \int \sqrt{x} dx + K \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(x) - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + K \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\ln(x) - \frac{2}{3} \right) + K \end{aligned}$$

où $K \in \mathbb{R}$.

(j) $\int e^x \cos^2(x) dx$:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos^2(x) dx &= \int \frac{e^x}{2} dx + \frac{1}{2} \int e^x \cos(2x) dx \\ &= \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \mathcal{I} \end{aligned}$$

où $K \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int e^x \cos(2x) dx \\ &= e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx \\ &= e^x \cos(2x) + 2e^x \sin(2x) - 4 \int e^x \cos(2x) dx \\ &= e^x (\cos(2x) + 2\sin(2x)) - 4\mathcal{I} \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{I} = \frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2\sin(2x)) + K$.

Ainsi, $\int e^x \cos^2(x) dx = \frac{e^x}{10} (5e^x + \cos(2x) + 2\sin(2x)) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

(k) $\int \sin(\ln(x)) dx$;

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln(x)) dx &= \int x \cdot \frac{1}{x} \sin(\ln(x)) dx \\ &= -x \cos(\ln(x)) + \int \cos(\ln(x)) dx \\ &= -x \cos(\ln(x)) + \mathcal{I}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int \cos(\ln(x)) dx \\ &= \int x \cdot \frac{1}{x} \cos(\ln(x)) dx \\ &= x \cdot \sin(\ln(x)) - \int \sin(\ln(x)) dx\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \sin(\ln(x)) dx = \mathcal{I} = -x \cos(\ln(x)) + x \sin(\ln(x)) - \mathcal{I}.$$

Ainsi, $\mathcal{I} = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Ex 4 :

1. $\int_0^1 t^2 e^t dt :$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 e^t dt &= [t^2 e^t]_0^1 - 2 \int_0^1 t e^t dt \\ &= [t^2 e^t - 2 t e^t]_0^1 + 2 \int_0^1 e^t dt \\ &= [t^2 e^t - 2 t e^t + 2 e^t]_0^1 \\ &= 2.(e - 1) \end{aligned}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t . \ln(1 + \cos t) dt :$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t . \ln(1 + \cos t) dt &= [\sin t \ln(1 + \cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 t}{1 + \cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos t dt \\ &= [t - \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

3. $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt &= \int_1^2 \ln(1+t) \frac{1}{t^2} dt \\ &= [-\frac{\ln(1+t)}{t}]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t} \frac{1}{1+t} dt \\ &= [-\frac{\ln(1+t)}{t}]_1^2 + \mathcal{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_1^2 \frac{1}{t+t^2} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2t+1-2t}{t^2+t} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t} - 2 \frac{1}{t+1} dt \\ &= [\ln(t^2+t) - 2\ln(1+t)]_1^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt &= [-\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln(t^2+t) - 2\ln(1+t)]_1^2 \\ &= \ln(5) - \frac{5}{3}\ln(3) + 2\ln(2) \end{aligned}$$

Ex 5 :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_1^e \cos(\pi \ln x) dx \\ &= \int_1^e 1 . \cos(\pi \ln x) dx \\ &= [x \cos(\pi \ln x)]_1^e + \int_1^e \pi \sin(\pi \ln x) dx \\ &= 1 - e + \pi \mathcal{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_1^e 1 . \sin(\pi \ln x) dx \\ &= [x \sin(\pi \ln x)]_1^e - \pi \int_1^e \cos(\pi \ln x) dx \\ &= 0 - \pi \mathcal{I} \quad (1) \end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{I} = 1 - e - \pi^2 \mathcal{I}$

Ainsi, $\mathcal{I} = \frac{1}{1+\pi^2} (1 - e)$

Et, $\mathcal{J} = \frac{\pi}{1+\pi^2} (e - 1)$, d'après (1).

Ex 8 :

$$\mathcal{I} = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx$$

Changement de variable :

$$t = \pi - x, \text{ donc :}$$

$$x = \pi - t$$

$$\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$$

$$dx = (-1)dt$$

$$x : 0 \dots \pi \Rightarrow t : \pi \dots 0$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin t}{3+\sin^2 t} \cdot (-1) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin t}{3+\sin^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\pi \sin t}{3+\sin^2 t} dt - \mathcal{I} \end{aligned}$$

$$\text{Et ainsi : } \mathcal{I} = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\sin^2 t} dt$$

Comme $3 + \sin^2 t = 4 - \cos^2 t = (2 - \cos t)(2 + \cos t)$, on peut écrire :

$$\mathcal{I} = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{(2 - \cos t)(2 + \cos t)} dt$$

Et en décomposant en éléments simples, on a :

$$\mathcal{I} = \frac{\pi}{8} \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{2 - \cos t} + \frac{\sin t}{2 + \cos t} \right) dt, \text{ qu'on peut écrire :}$$

$$\mathcal{I} = \frac{\pi}{8} \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{2 - \cos t} - \frac{-\sin t}{2 + \cos t} \right) dt \text{ pour faire apparaître les dérivés logarithmiques...}$$

$$\text{Finalement : } \mathcal{I} = \frac{\pi}{8} [\ln|2 - \cos t| - \ln|2 + \cos t|]_0^\pi = \frac{\pi}{4} \ln(3).$$

N.B. : La décomposition en éléments simples n'est pas naturelle, mais a priori, la seule chance de trouver une primitive et d'écrire $\frac{\sin t}{(2 - \cos t)(2 + \cos t)}$ sous la forme $\frac{a \cdot \sin t}{2 - \cos t} + \frac{b \cdot \sin t}{2 + \cos t}$ et comme la vie est bien faite, on trouve : $a = b = 1/4$.

Ex 9 :

(e) : $\int^t \frac{x^3+2}{x^2+3x+2} dx$

$$\begin{aligned} \frac{x^3+2}{x^2+3x+2} &= \frac{x^3+3x^2+2x+2-3x^2-2x}{x^2+3x+2} \\ &= x - \frac{3x^2+2x-2}{x^2+3x+2} \\ &= x - \frac{3x^2+9x+6-7x-8}{x^2+3x+2} \\ &= x - 3 + \frac{7x+8}{(x+1)(x+2)} \\ &= x - 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{6}{x+2} \end{aligned}$$

Donc les primitives recherchées sont de la forme :

$$\frac{t^2}{2} - 3x + \ln|t+1| + 6\ln|t+2| + K, K \in \mathbb{R}.$$

$$(f) : \int^t \frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)} dx$$

$$\frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)} = \frac{5}{3} \frac{1}{x} - \frac{3}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{11}{12} \frac{1}{x+3}$$

Donc les primitives recherchées sont de la forme :

$$\frac{5}{3} \ln|x| - \frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{11}{12} \ln|x+3| + K, K \in \mathbb{R}.$$

Ex 11 :

$$\text{Soit } I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt.$$

$$1. \quad \begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{n-1} dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} dt + \int_0^1 \frac{t}{2n} \cdot (-2nt)(1-t^2)^{n-1} dt \\ &= I_{n-1} + \left[\frac{t}{2n} (1-t^2)^n \right]_0^1 - \frac{1}{2n} \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \quad (1)$$

2. D'après (1), on déduit :

$$I_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} * I_0.$$

Et $I_0 = 1$, donc :

$$I_n = 2^n (n-1)! \prod_{k=1}^n \frac{1}{(2n+1)!}.$$

3. Pour calculer I_n , on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n C_n^k 1^{n-k} (-t^2)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

$$\text{On conclut que : } \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{1}{2k+1} = 2^n (n-1)! \prod_{k=1}^n \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Quelques conseils :

- Pour calculer la primitive d'une fonction qui est le produit d'une exponentielle et d'une fonction trigo, on fait 2 intégrations par parties et on se ramène à une équation à résoudre. (cf ex 3).
- pour les changements de variables : $u = f(x)$:
 $du = f'(x)dx$ ou alors $dx = (f^{-1})'(u)du$
- Fonctions rationnelles :
Se ramener à qqch de la forme : $f(x) = A(x) + \frac{N(x)}{D(x)}$. $A(x)$ est un polynôme et il y a autant de fractions $\frac{N(x)}{D(x)}$ que nécessaires.
Il faut simplement que : $\deg(N(x)) < \deg(D(x))$.